

Basiswissen Teil A - ohne Hilfsmittel

(Hinweis: Aufgaben mit * gehören zur Aufgabengruppe 2 und beinhalten Bewertungseinheiten aus dem Anforderungsbereich III.)

- 1a) In einer Urne befinden sich fünf gelbe und drei blaue Kugeln. Es werden nacheinander vier Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E wird mit $P(E) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1$ berechnet.

Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Ereignis E?

- ☐ Es werden zwei gelbe und zwei blaue Kugeln gezogen.
- ☐ Es werden zuerst alle drei blauen und dann eine gelbe Kugel gezogen.
- ☐ Es werden zuerst drei gelbe und dann eine blaue Kugel gezogen.
- ☐ Es werden vier blaue Kugeln gezogen.
- ☐ Es werden nur gelbe Kugeln gezogen.

- b) Bei einer Eignungsprüfung werden in einem Test vier Fragen gestellt. Zu jeder Frage werden drei Antworten vorgegeben, von denen jeweils genau eine richtig ist.

Eine Person wählt in diesem Test bei jeder Frage genau eine Antwort zufällig aus und kreuzt diese an.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person keine richtige Antwort ankreuzt, beträgt:

- ☐ $\frac{1}{81}$ ☐ $\frac{16}{81}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$

- c) Ein idealer Würfel wird zweimal jeweils zufällig geworfen und die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gebildet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augensumme ist größer als 8.“ beträgt:

- ☐ $\frac{2}{9}$ ☐ $\frac{5}{18}$ ☐ $\frac{11}{36}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{4}{9}$

- d) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-3 \cdot x} + 5$ ($x \in \mathbb{R}$).

Welche auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist eine Stammfunktion von f ?

- ☐ $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3 \cdot x} + 5 \cdot x$
- ☐ $F(x) = -3 \cdot e^{-3 \cdot x} + 5 \cdot x$
- ☐ $F(x) = e^{-3 \cdot x} + 5 \cdot x$
- ☐ $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3 \cdot x}$
- ☐ $F(x) = -3 \cdot e^{-3 \cdot x}$

- e) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Welche Gleichung beschreibt die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion F von f mit $F(1) = 3$?

- ☐ $F(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{6}$
- ☐ $F(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6}$
- ☐ $F(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2$
- ☐ $F(x) = 8 \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{13}{2}$
- ☐ $F(x) = 8 \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{13}{2}$

f) Der Graph einer Funktion schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein.

Welches der folgenden Integrale gibt den Inhalt einer derartigen Fläche an?

$$\int_{-2}^2 (x+1) dx$$

$$\int_{-2}^2 (\sin x) dx$$

$$\int_{-2}^2 e^x dx$$

$$\int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx$$

$$\int_{-2}^2 (x^4 - 1) dx$$

2 Der Engländer GALTON (1822 – 1911) untersuchte den Zusammenhang der Augenfarbe an 1000 Vater-Sohn-Paaren.

Es bedeuten:

A: Der Vater ist helläugig

B: Der Sohn ist helläugig.

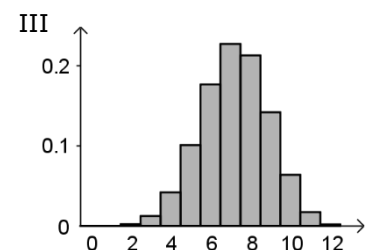
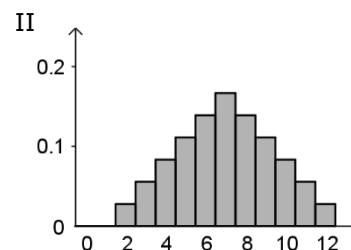
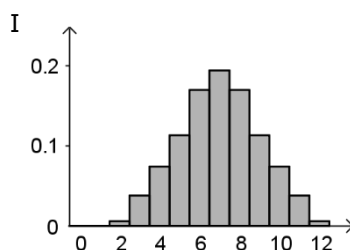
Untersuchen Sie A und B auf stochastische Unabhängigkeit, wenn nebenstehende Untersuchungsergebnisse gefunden wurden.

	B	$\bar{B}$
A	471	151
$\bar{A}$	148	230

3 Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y :

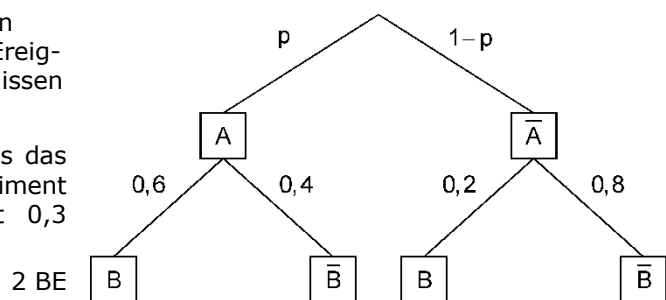
- ♦ Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- ♦ Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

- a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt. 2 BE
- b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 3 BE



4* Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ dar.

- a) Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment insgesamt mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 eintritt. 2 BE



- b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann. 3 BE

5* Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X=0) = P(X=5)$, $P(X=1) = P(X=4)$ und $P(X=2) = P(X=3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2			
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

- a) Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein. 2 BE

- b) Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist. 3 BE

6 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .

- a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung

einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x) dx$.

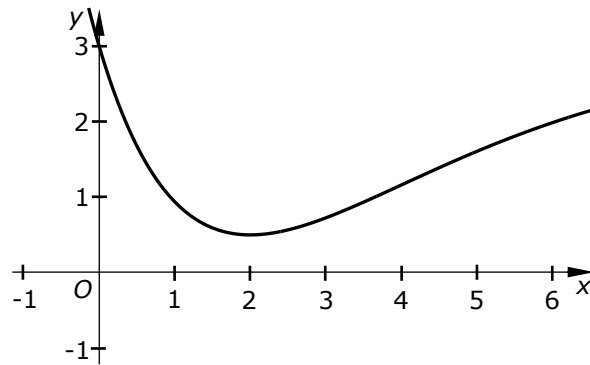
2 BE

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

- b) Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

1 BE

- c) Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x) dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.



7 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt.

Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3 \cdot t^2 - 60 \cdot t + 500$ mit $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 10$ beschrieben werden.

- a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung. 3 BE
- b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt. 2 BE

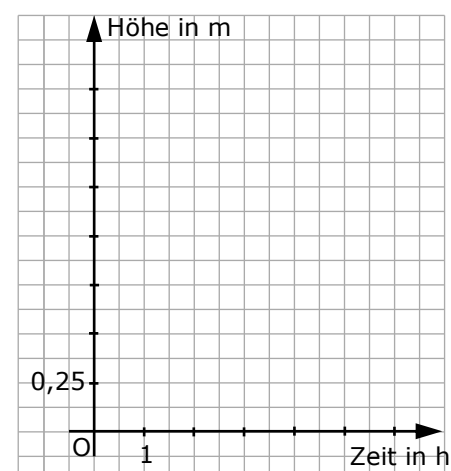
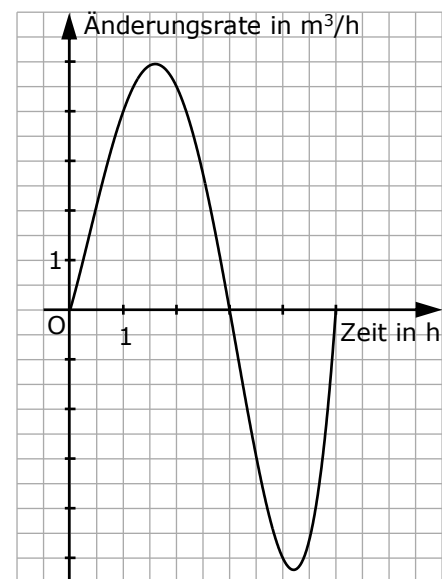
8* Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von 5 m^2 und ist zunächst leer. Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$) der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

- a) Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

2 BE

- b) Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.

3 BE



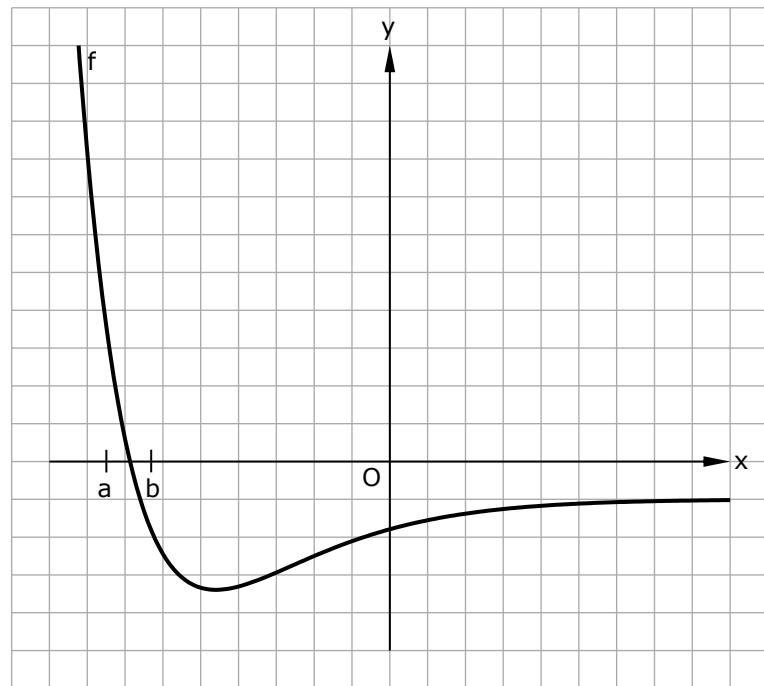
9* Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f .

- a Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f .

2 BE

- b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

3 BE



Teil B - mit Hilfsmittel

- 1 Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones.

- a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte; davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.“

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.“

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

- c) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- d) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

- e) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- f) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann.
Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

- g) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

2 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$.

Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zur y -Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert. Erreichbare BE-Anzahl: 04

b) Die folgende Aussage bezieht sich auf eine zweite Gerade, die das Flächenstück teilt:

$$\text{Für } u \approx 217 \text{ gilt: } \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) + \int_u^{240} f(x) dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{240} f(x) dx$$

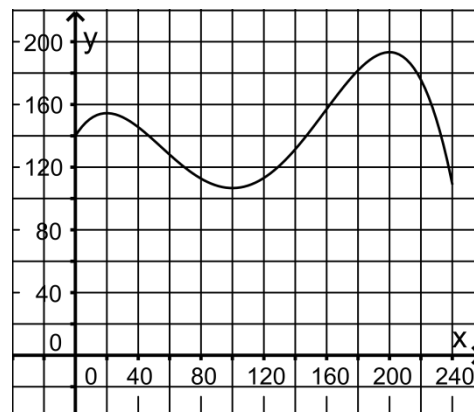
Veranschaulichen Sie die Aussage unter Verwendung einer geeigneten Skizze.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$).

Die Abbildung zeigt den Graphen von f .



c) Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor.

Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ gemessen wurden. Erreichbare BE-Anzahl: 03

d) Berechnen Sie für den betrachteten Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt. Erreichbare BE-Anzahl: 04

e) Veranschaulichen Sie jeden der folgenden Terme in der Abbildung durch eine Gerade und geben Sie jeweils die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an:

I $\frac{f(100) - f(20)}{100 - 20}$

II $\lim_{x \rightarrow 60} \frac{f(60) - f(x)}{60 - x}$

Erreichbare BE-Anzahl: 04

f) Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0,3 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute und $+0,3 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute lag. Erreichbare BE-Anzahl: 04

g) Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a; b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Berechnen Sie damit für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert aller Glukosewerte.

Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

Erreichbare BE-Anzahl: 05