

Dein Test – Teil A

Tragen Sie die Antworten zur Aufgabe 1 sowie zur Aufgabe 2.2 und 4.1 auf den vorliegenden Aufgabenblättern ein und verwenden Sie für die Antworten zu den übrigen Aufgaben das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

Pflichtbereich

Lösen Sie die Aufgaben 1 bis 4.

- 1 In den Teilaufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

- 1.1 Der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x) = \ln(2 \cdot x - 3)$ ist

☐ $D_f = \{x; x \in \mathbb{R}\}$

☐ $D_f = \left\{x; x \in \mathbb{R}, x < \frac{3}{2}\right\}$

☐ $D_f = \{x; x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

☐ $D_f = \left\{x; x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{3}{2}\right\}$

☐ $D_f = \left\{x; x \in \mathbb{R}, x > \frac{3}{2}\right\}$

- 1.2 Für welche Funktion f mit $x \in D_f$ gilt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$?

☐
☐
☐
☐
☐

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x}$

$f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}$

- 1.3 Welcher der angegebenen Terme beschreibt einen Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ($x \in D_f$)?

☐
☐
☐
☐
☐

$2 \cdot x \cdot e^x + e \cdot x^2$

$x^2 \cdot e^x$

$2 \cdot x \cdot e^x + x^2$

$2 \cdot x \cdot e^x$

$2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

- 1.4 Die Abbildung zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f .

Welche Aussage trifft im dargestellten Intervall auf die Funktion f zu?

☐

Die Funktion f ist für $1 \leq x \leq 2$ monoton fallend.

☐

Die Funktion f besitzt zwei Extremstellen.

☐

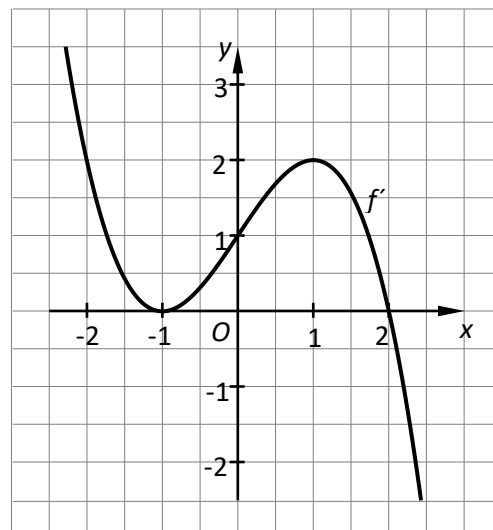
Die Funktion f besitzt zwei Wendestellen.

☐

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle 1 eine waagerechte Tangente.

☐

Die Funktion f ist eine quadratische Funktion.



- 1.5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x - a & \text{für } x \leq 1 \\ 3 & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R})$.

Für welchen Wert von a ist f an der Stelle 1 stetig?

- 2

- 1

0

1

2

Erreichbare BE-Anzahl: 05

- 2 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$. Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$.

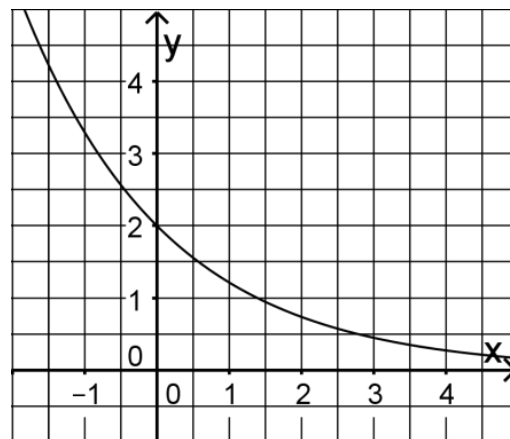
- 2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y -Achse.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 2.2 Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f , der x -Achse, der y -Achse sowie einer zur y -Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt.

Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 03



- 3 Betrachtet werden die Ebenen $E_1: x_2 + 2x_3 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 8x_3 + 1 = 0$.

- 3.1 Geben Sie die besondere Lage von E_1 im Koordinatensystem an.

Erreichbare BE-Anzahl: 01

- 3.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung von E_1 und E_2 und geben die Gleichung einer möglichen Schnittgeraden der Ebenen an.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

- 4 Im Zusammenhang mit einem Zufallsexperiment werden die Ereignisse A und B betrachtet.

Es gilt: $P(A) = 3 \cdot p$, $P(B) = 4 \cdot p$ und $P(A \cap B) = p$ ($0 < p < 1$).

- 4.1 Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	
B			
$\bar{B}$		$1 - 6 \cdot p$	
			1

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 4.2 Begründen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{4}$ annehmen kann.

Erreichbare BE-Anzahl: 01

- 4.3 Untersuchen Sie, ob es Werte von p gibt, so dass die Ereignisse A und B voneinander stochastisch unabhängig sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Wahlbereich**Wählen Sie zwei beliebige aus den Aufgaben 5 bis 10 aus und lösen Sie diese.**

- 5 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2$ und $g: x \mapsto -x^2$.

Eine Gerade $x = u$ ($u \in \mathbb{R}$) schneidet den Graphen von f im Punkt A und den Graphen von g im Punkt B .

Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Koordinatensystem und begründen Sie ohne Verwendung der ersten Ableitungen von f und g , dass der Abstand von A und B für $u = -\frac{1}{4}$ minimal wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 05

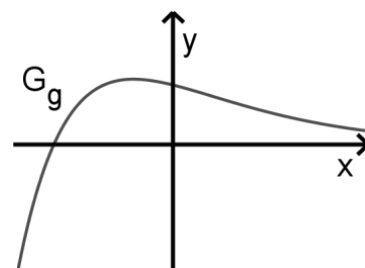
- 6 Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g .

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f , für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.

- 6.1 Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 6.2 Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.



Erreichbare BE-Anzahl: 03

- 7 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}; a > 0$ eine Ebene $E_a: a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z = 1$.

- 7.1 Die Schnittpunkte von E_a mit den Koordinatenachsen bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide.

Bestimmen Sie den Wert von a , so dass diese Pyramide ein Volumen von $\frac{4}{3}$ besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

- 7.2 Die Ebene F enthält alle Punkte, deren x - und z -Koordinate gleich sind.

Begründen Sie, dass F jede Ebene E_a rechtwinklig schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 8 Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses

Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- 8.1 Begründen Sie, dass das Quadrat in der y - z -Ebene liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 8.2 Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g , der Punkt $Q(0|8|4)$ in der y - z -Ebene.

Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

- 9.1 Die binomialverteilte Zufallsgröße X_1 hat die Parameter $n_1 = 4$ und p_1 sowie den Erwartungswert 2.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 4)$.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 9.2 Die binomialverteilte Zufallsgröße X_2 hat die Parameter n_2 und $p_2 = 0,2$.

Formulieren Sie dazu eine Aufgabenstellung, die sich mithilfe des Ansatzes $1 - 0,8^{n_2} < 0,3$ lösen lässt.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

- 10 Ein Zufallsversuch besteht im einmaligen Drehen eines Glücksrads mit drei Sektoren. Dabei gibt die Zufallsgröße X den Gewinn abzüglich des Einsatzes für den Spieler in Euro an. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

x_i	-2	-1	5
$P(X = x_i)$	0,35	a	0,2

- 10.1 Geben Sie $P(X = -1)$ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 01

- 10.2 Weisen Sie nach, dass das einmalige Drehen des Glücksrads kein faires Spiel darstellt.

Erreichbare BE-Anzahl: 02

- 10.3 Das Glücksrad wird nun mehrfach gedreht.

Beschreiben Sie ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet wird:

$$\sum_{i=0}^2 \binom{5}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{5-i}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 02

Kreuzen Sie die beiden Aufgaben des Wahlbereichs an, die bewertet werden sollen:

☐

Aufgabe 5

☐

Aufgabe 6

☐

Aufgabe 7

☐

Aufgabe 8

☐

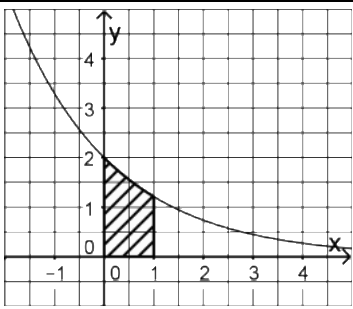
Aufgabe 9

☐

Aufgabe 10

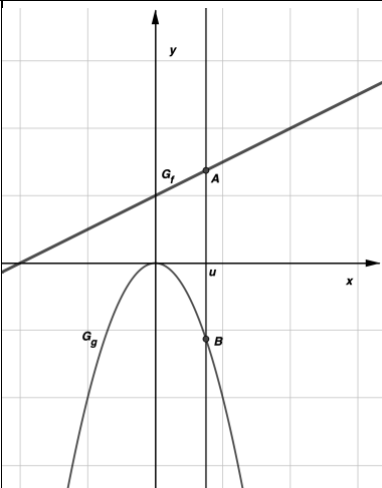
Erwartungshorizont

1 Feld 5, Feld 2, Feld 5, Feld 3, Feld 2

2.1	$f(0) = 2, f'(0) = -1$ Damit: $y = -x + 2$	2
2.2	 Term: $\int_0^1 f(x) dx$	3

3.1	Die Ebene verläuft durch die x-Achse.	2
3.2	- Aufstellen des (erweiterten) Gleichungssystems $\begin{array}{rrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 0x_2 & - & 8x_3 & = & -1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$ - Lösen des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren: $\begin{array}{ccc c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc c} 3 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ → Aus der dritten Zeile kann man ablesen, dass x_3 frei wählbar ist: $x_3 = k$ → Damit folgt aus der zweiten Zeile: $x_2 = -2 \cdot k$ → Die erste Zeile liefert schließlich: $x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cdot k$ - Da nun Ergebnisse für x_1, x_2 und x_3 vorliegen, kann man diese in einer Vektorschreibweise zusammenfassen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	3

4.1	<table><tr><td></td><td>A</td><td>$\bar{A}$</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>p</td><td>$3 \cdot p$</td><td>$4 \cdot p$</td></tr><tr><td>$\bar{B}$</td><td>$2 \cdot p$</td><td>$1 - 6 \cdot p$</td><td>$1 - 4 \cdot p$</td></tr><tr><td></td><td>$3 \cdot p$</td><td>$1 - 3 \cdot p$</td><td>1</td></tr></table>		A	$\bar{A}$		B	p	$3 \cdot p$	$4 \cdot p$	$\bar{B}$	$2 \cdot p$	$1 - 6 \cdot p$	$1 - 4 \cdot p$		$3 \cdot p$	$1 - 3 \cdot p$	1	2
	A	$\bar{A}$																
B	p	$3 \cdot p$	$4 \cdot p$															
$\bar{B}$	$2 \cdot p$	$1 - 6 \cdot p$	$1 - 4 \cdot p$															
	$3 \cdot p$	$1 - 3 \cdot p$	1															
4.2	Für $p = \frac{1}{4}$ ist $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = -0,5$.	1																
4.3	Wenn $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ gilt, so sind A und B stochastisch unabhängig. $3 \cdot p \cdot 4 \cdot p = p$ ist mit $p > 0$ für $p = \frac{1}{12}$ erfüllt.	2																

5	 Aus $d(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}$ folgt $S\left(-\frac{1}{4} \mid \frac{31}{16}\right)$ als Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Normalparabel. Damit ist der Abstand minimal für $u = -\frac{1}{4}$.	5
---	--	---

6.1	Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.	2
6.2	$f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$. Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$, d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.	3

7.1	Schnittpunkte von E_a mit den Koordinatenachsen: $\left(\frac{1}{a} \mid 0 \mid 0\right)$, $\left(0 \mid \frac{1}{a} \mid 0\right)$ und $\left(0 \mid 0 \mid \frac{1}{a}\right)$ Aus $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3}$ folgt $a = \frac{1}{2}$.	3
7.2	$\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a - a = 0$	2

8.1	P liegt in der y - z -Ebene, der Richtungsvektor von g steht senkrecht dazu.	2
8.2	Schnittpunkt der Diagonalen $S(0 \mid 4 \mid 1)$ Mit $\vec{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{SQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $ \vec{SP} = \vec{SQ} $ und $\vec{SP} \circ \vec{SQ} = 0$	3

9.1	Mit $4 \cdot p_1 = 2 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2}$ ergibt sich $P(X_1 = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.	2
9.2	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Treffer erzielt wird, ist kleiner als 0,3. Bestimmen Sie alle Werte, die für n_2 infrage kommen.	3

10.1	$P(X = -1) = 0,45$	1
10.2	$E(X) = -2 \cdot 0,35 - 1 \cdot 0,45 + 5 \cdot 0,2 = -0,15 \neq 0$	2
10.3	Bei 5-maligem Drehen des Glücksrades mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$ werden höchstens zweimal 5 € gewonnen.	2