Mein Ma-ABI $45^2 + 1$	THEMA: Abstandsaufgaben Schwerpunkt AG	langfristige Aufgabe 3 HM: MMS/Formelsammlung	auch erhältlich auf www.maphyside.de

Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind und berechnen Sie den Abstand zwischen den beiden Geraden.

b) Berechnen Sie alle Punkte auf g und h, die vom Ursprung aus den Abstand 8 haben.

c) Bestimme den Abstand des Stützpunktes von g zur Geraden h .

d) Man kann den Abstand windschiefer Geraden auf den Abstand paralleler Ebenen zurück führen. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang mit einer Skizze und berechnen Sie die Gleichungen der parallelen Ebenen E_g und E_h mit $g \subset E_g$ und $h \subset E_h$.

e) Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden k , die g und h orthogonal schneidet.

f) Die Geraden g und h können auch Flugbahnen zweier Flugzeuge darstellen (Längen in Kilometern und t in Minuten).

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Flugzeuge in Kilometern pro Stunde.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, bei dem sich die Flugzeuge am nächsten kommen.
Wie groß ist dieser minimale Abstand?

Senkrecht von oben scheint die Sonne auf die Flugzeuge. Deren Bahn beschreibt auf dem ebenen Boden ($x_1x_2 - Ebene$) je eine „Schattenlinie“.
In welchem Punkt schneiden sich diese beiden Linien?

Mein Ma-ABI 45^2+1	THEMA: Aufgaben B2 Schwerpunkt AG	langfristige Aufgabe 3 HM: MMS/Formelsammlung	Lösungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix} + \cancel{t}\,s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

a) $g \overset{!}{=} h$ ↯ keine Lsg für t, s (CAS) und RV$_{en}$ sind kein Vielfaches voneinander. → g und h sind windschief.

$\left\{\begin{array}{l}1+t=6-s\\2-t=5-s\\t=7\end{array}\right|_{s,t}$ No Solution

(Nachweis mit der nachfolgenden Abstandsberechnung überflüssig, da >0)

$d(g,h) = d(H,g)$ mit $\vec{n}_H \overset{*)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{RV_g \times RV_h} \overset{(CAS)}{=} \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

*) Bei parallelen Geraden liefert das Kreuzprodukt der RV$_{en}$ den Nullvektor.

$$= (SV_g - SV_h)\cdot\frac{1}{|\vec{n}_H|}\cdot\vec{n}_H$$

$$= \begin{pmatrix}-5\\-3\\-7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \underline{\underline{4{,}9\ [LE]}}$$

(keine Betragsstriche in HNF-Formel nötig.)

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}-5\\-3\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)\times 1/\sqrt{6}$ 4.898979486

b) Variabler Punkt auf g: $G_t = (1+t \mid 2-t \mid t)$

$|\overrightarrow{OG_t}| \overset{!}{=} 8 \rightsquigarrow t_1 = -4{,}1;\ t_2 \approx 4{,}8$

→ $\underline{\underline{G_1(-3{,}1 \mid 6{,}1 \mid -4{,}1) \quad G_2(5{,}8 \mid -2{,}8 \mid 4{,}8)}}$

analog $|\overrightarrow{OH_s}| \overset{!}{=} 8$ mit $H_s(6-s \mid 5-s \mid 7) \rightsquigarrow s_1 \approx 2{,}8 \quad s_2 \approx 8{,}2$

→ $\underline{\underline{H_1(3{,}2 \mid 2{,}2 \mid 7) \quad H_2(-2{,}2 \mid -3{,}2 \mid 7)}}$

$\text{solve}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1+t\\2-t\\t\end{bmatrix}\right)=8,t\right)$ {t=-4.113888021,t=4.780554688}

$\text{solve}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6-s\\5-s\\7\end{bmatrix}\right)=8,s\right)$ {s=2.807417596,s=8.192582404}

c) Abstand Punkt Gerade

Variabler Punkt auf h: $\underline{H_s(6-s \mid 5-s \mid 7)}$

Min. Abstand $SP_g - H_s$ = Minimum $|\overrightarrow{SV_g H_s}|$

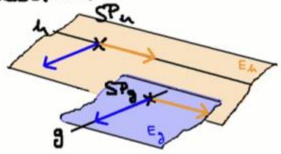
$$\text{Min}\left|\begin{pmatrix}6-s-1\\5-s-2\\7-0\end{pmatrix}\right| \approx \underline{\underline{7{,}1\ [LE]}}$$

$\text{fMin}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}5-s\\3-s\\7\end{bmatrix}\right),\underline{\underline{s}}\right)$ notwendig falls Variable $\neq x$!

{MinValue=7.141428429,s=4}

d) Verwendet man die beiden Richtungsvektoren der Geraden als Spannvektoren der Ebenen, so erhält man mit den jeweiligen Stützvektoren die beiden Ebenen, die je eine Gerade enthalten.

Skizze:



$$\rightsquigarrow \underline{E_g}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{E_h}: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

e) Es soll gelten:

$k \perp g$ und $k \perp h$. Die Schnittpunkte von k mit g und h sind die Geradenpunkte mit minimalem Abstand. Die Berechnung erfolgt über die „Orthog.-Bedingung des variablen Verbindungsvektors". (Minimierung führt nicht zum Ziel, da zwei Variablen existieren.)

(vgl. Hinweise, Punkt 1+2)

$$\text{aus b): } \left.\begin{array}{l}G_t = (1+t \mid 2-t \mid t)\\ H_s(6-s \mid 5-s \mid 7)\end{array}\right\} \rightsquigarrow \overrightarrow{G_tH_s} = \begin{pmatrix}6-s-1-t\\5-s-2+t\\7-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{pmatrix}$$

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$ $-3\cdot t+9$

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)$ $2\cdot s-8$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{G_tH_s}\cdot RV_g \overset{!}{=} 0\\ \overrightarrow{G_tH_s}\cdot RV_h \overset{!}{=} 0\end{array}\right\} \overset{CAS}{\rightsquigarrow} s=4,\ t=3 \rightsquigarrow G_3(4 \mid -1 \mid 3),\ H_4(2 \mid 1 \mid 7)$$

$\left\{\begin{array}{l}-3\cdot t+9\\2\cdot s-8\end{array}\right|_{s,t}$ {s=4,t=3}

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{k: \vec{x}}} = \overrightarrow{OG_3} + t\cdot\overrightarrow{G_3H_4} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2-4\\1+1\\7-3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}}}$$

f) Bewegungsaufg. + windsch. Geraden

<u>Die Länge des RV einer Bewegungsgl. ist ein Maß für die Geschwindigkeit.</u>

→ Flugzeug G: $v = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}\ \left[\frac{km}{min}\right]$ → 1 min · 60 = 1 h

$\hat{=}\ \sqrt{3}\cdot 60 \approx \underline{104\ \left[\frac{km}{h}\right]}$

Hier darf kein „="-Zeichen stehen, da $\sqrt{3} \neq \sqrt{3}\cdot 60$ ist.

Flugzeug H: $v = \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$

→ $\sqrt{2}\cdot 60 \approx \underline{85\left[\frac{km}{h}\right]}$

<u>Hinweis</u>: Mindestgeschw. bei Leichtflugzeugen ≈ 100 $\frac{km}{h}$. Ultra-Leichtflugzeuge fliegen bereits ab 50 $\frac{km}{h}$, Zeppeline zwischen 70 und 125 $\frac{km}{h}$.

<u>Minimaler Abstand</u> über Minimierung des variablen Verbindungsvektors. Hier mögl., da der Parameter in beiden Gleichungen die gleiche Bedeutung (Flugzeit) hat.

→ $d(G,H) = \text{Minimum}\ |\overrightarrow{G_tH_t}| = \text{Min.}\left|\begin{pmatrix}5-2t\\3\\7-t\end{pmatrix}\right|$ vgl. e): $\overrightarrow{G_tH_s} = \begin{pmatrix}6-s-1-t\\5-s-2+t\\7-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{pmatrix}$

(CAS)
→ Nach <u>3,4 Minuten</u> beträgt der Abstand zwischen den Flugzeugen ca. <u>5 Kilometer</u>.

fMin(norm($\begin{bmatrix}5-2t\\3\\7-t\end{bmatrix}$),t)
{MinValue=5.019960159,t=3.4}

<u>Projektion</u> Hier spielt die x_3-Komponente keine Rolle.
Setze sie gleich null, oder besser: lasse sie weg.

→ Schattenlinien $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} + \cancel{t}\ s^{*)}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

Nur die Linien interessieren, die Schattenpunkte treffen sich nicht im Schnittpunkt.

→ $g \overset{!}{=} h$ liefert $s=4, t=1$ (CAS)

$\left|\begin{cases}1+t=6-s\\2-t=5-s\end{cases}\right|_{s,t}$ {s=4,t=1}

→ Die Schattenlinien treffen sich im Punkt $\underline{(5|4|0)}$.

(Quelle: https://www.mathematik-oberstufe.de/vektoren/a/abstand-gerade-ws-lot-lfd-punkt.html)