Lösungen

Basiswissen Teil A

zu 1 a) Feld 2 b) Feld 2 c) Feld 2 d) Feld 1 e) Feld 2 f) Feld 4

zu 2

Wie immer bei statistischen Untersuchungen verwendet man die ermittelten relativen Häufigkeiten als (sogenannte empirische) Wahrscheinlichkeiten.
Daher gilt:

$$P(A) = \tfrac{471+151}{1000} = 0{,}622\ ,$$

$$P(B) = \tfrac{471+148}{1000} = 0{,}619 \quad \text{und}$$

$$P(A \cap B) = \tfrac{471}{1000} = 0{,}471.$$

Es folgt $P(A) \cdot P(B) = 0{,}622 \cdot 0{,}619 \approx 0{,}385$

Obwohl man bei statistischen Untersuchungen mit Abweichungen rechnen muß, kann man dennoch sagen, daß $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ist, d.h. A und B muß man als abhängige Ereignisse ansehen.

Die Vererbung ist also mit im Spiel!

zu 3

a) Beide betrachteten Ereignisse bestehen jeweils aus drei Ergebnissen.

b) Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y asymmetrisch ist, kommt dafür nur das Diagramm III infrage. Die Wahrscheinlichkeit $P(X=3)$ ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit $P(X=2)$. Folglich wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch das Diagramm II dargestellt.

zu 4

a) $p \cdot 0{,}6 + (1-p) \cdot 0{,}2 = 0{,}3 \Leftrightarrow p = 0{,}25$

b) $P(B) = p \cdot 0{,}6 + (1-p) \cdot 0{,}2 = p \cdot 0{,}4 + 0{,}2$
Die Wahrscheinlichkeit von B kann also maximal den Wert 0,6 annehmen.

zu 5

a)

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1,00

b)
Aus Symmetriebedingung folgt: p = 0,5

Spezialfall $k = 0$:

$$P(0 \text{ Treffer}) = P_p^n(X=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(0 \text{ Treffer}) = (1-p)^n$$

X ist nicht binomialverteilt, da z.B. $P_{0,5}^5(X=0) = 0{,}5^5 = \frac{1}{32} \neq 0{,}05.$

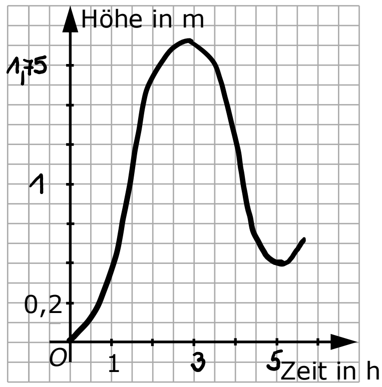
zu 6

a)	Im angegebenen Intervall liegen zwischen Graph und x-Achse ungefähr 9 Kästchen. $\int_3^5 f(x)\,dx \approx 9 \cdot 0{,}25 = 2{,}25 \approx 3{,}3$	2
b)	$F'(2) = f(2) \approx 0{,}5$	1
c)	Nach HDI gilt: $\int_3^b f(x)\,dx = F(b) - F(3) = F(b)$, da $F(3) = 0$	2

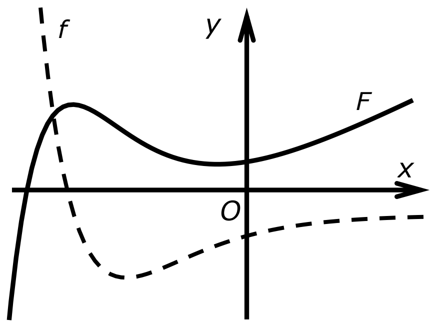
zu 7

a)	$\frac{n(2)-n(0)}{2}=\frac{392-500}{2}=-54$ Die Anzahl der Pollen nimmt in diesem Zeitraum um 54 pro Kubikmeter ab.	3
b)	$n'(t)=6\cdot t-60,\ n'(t)=-30 \Leftrightarrow t=5$ Der Zeitpunkt ist fünf Stunden nach Beginn der Messung erreicht.	2

zu 8

a)	Nach Auszählen der Kästchen im Bereich der Fläche, welche vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird,ergeben sich etwa 36 Kästchen bzw. 9 Quadrate mit dem Inhalt 1 m³. Daher sind etwa 9 m³ zugeflossen.	2
b)	Hinweise: - der Graph verläuft durch O - alle Punkte liegen im ersten Quadranten - an der Stelle 3 liegt ein Maximum vor ($\approx 1{,}8$) - an der Stelle 5 liegt ein Minimum vor ($\approx 0{,}5$)  	3

zu 9

a)	links der Nullstelle von f ist die Stammfunktion monoton wachsend, rechts fallend; der Graph der Stammfunktion besitzt einen Hochpunkt an der Stelle x_N	2
b)	Darstellung • des Extrempunktes des Graphen der Stammfunktion • der Monotonieintervalle der Stammfunktion • des Wendepunktes des Graphen der Stammfunktion • des Anstiegs der Stammfunktion für $x>0$  	3

Teil B - mit Hilfsmittel

zu 1

a) $\binom{6}{4} = 15$ **02 BE**

b) $P(A) = \frac{\binom{47}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 50{,}4\,\%$, $P(B) = 1 - P(A) \approx 49{,}6\,\%$ **03 BE**

c) $0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 3\,\%$ **02 BE**

d) $\frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{0{,}03} = \frac{1}{6}$ **03 BE**

e) X: Anzahl der fehlerhaften Geräte
Der Erwartungswert von X ist $250 \cdot 0{,}05 = 12{,}5$.
$P(X = 12) \approx 11{,}6\,\%$, $P(X = 13) \approx 11{,}2\,\%$
Damit ist die gesuchte Anzahl 12. **02 BE**

f) $s = 199$
Unter 200 im Werk D hergestellten zufällig ausgewählten Geräten ist höchstens eines fehlerhaft. **02/02 BE**

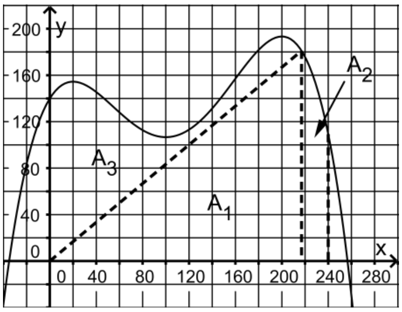
g) Ist n die Anzahl auszuwählender Geräte, so liefert Probieren für
$n = 526$: $P(X \geq 500) \approx 88{,}5\,\%$;
$n = 527$: $P(X \geq 500) \approx 91{,}9\,\%$.
Es müssen mindestens 527 Geräte ausgewählt werden. **04 BE**

20 BE

zu 2

a) $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x = \int_k^{240} f(x)\mathrm{d}x$ liefert $k \approx 135{,}5$, d. h. die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben. **04 BE**

b)

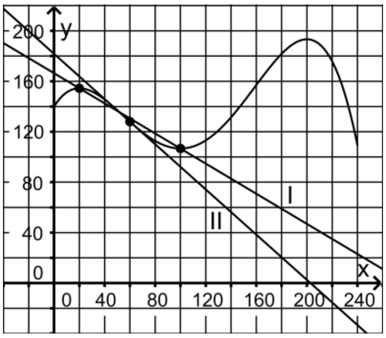


Es gilt: $A_1 + A_2 = \frac{2}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3)$ **04 BE**

c) Mithilfe des Graphen von f und der Gerade mit der Gleichung $y = 170$ ergibt sich, dass Glukosewerte über 170 $\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ zwischen etwa 170 Minuten und 223 Minuten nach Beobachtungsbeginn und damit etwa 53 Minuten lang gemessen wurden. **03 BE**

d) $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$ liefert: $x \approx 158{,}7$
Da $f'(0) = 1{,}6$ und $f'(158{,}7) \approx 1{,}3$, steigt der Glukosewert zu Beobachtungsbeginn am stärksten an. **04 BE**

e)



I: mittlere Änderungsrate des Glukosewerts im Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn

II: momentane Änderungsrate des Glukosewerts 60 Minuten nach Beobachtungsbeginn **04 BE**

f) Mit $|f'(x)| \leq 0{,}3$ ergibt sich, dass die momentane Änderungsrate des Glukosewerts in folgenden Zeiträumen zwischen den angegebenen Werten lag:
- von etwa 15,2 Minuten bis etwa 25,8 Minuten
- von etwa 90,3 Minuten bis etwa 109,3 Minuten
- von etwa 195,5 Minuten bis etwa 203,9 Minuten

Damit liegt die momentane Änderungsrate etwa 38 Minuten lang im angegebenen Bereich. **04 BE**

g) Mittelwert aller Glukosewerte: $\frac{1}{80} \cdot \int_{20}^{100} f(x)\mathrm{d}x \approx 129{,}2$
Mittelwert derjenigen Glukosewerte, die im angegebenen Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten gemessen wurden:
$\frac{1}{9} \cdot (f(20) + f(30) + \ldots + f(10)) \approx 129{,}3$
Der Mittelwert aller Glukosewerte ist etwa 0,1 % kleiner. **05 BE**