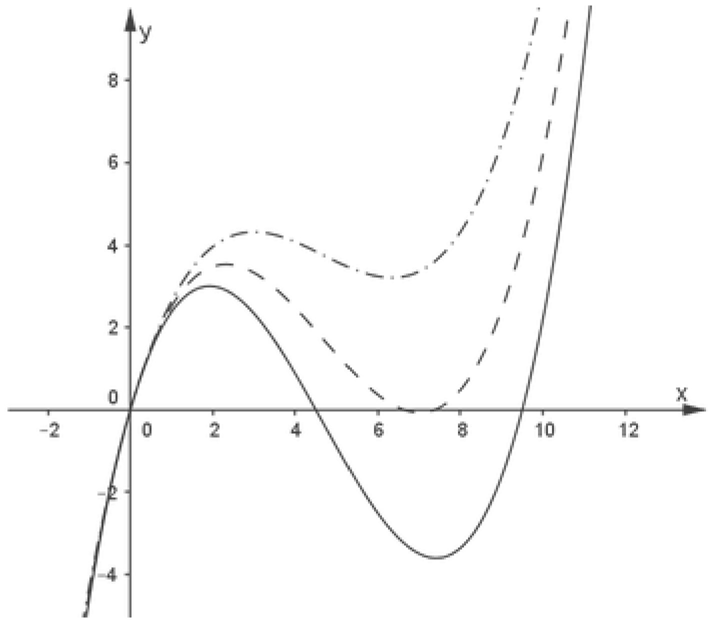
Mein Ma-ABI $\sqrt{4080400}$	Thematische Übung Funktionenschar & Extremwert	Aufgabe **1** HM: GTR/TW	auch erhältlich auf www.maphyside.de

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$f_a(x) = ax^3 - 14ax^2 + 3{,}42x;\ a \in R,\ a > 0.$

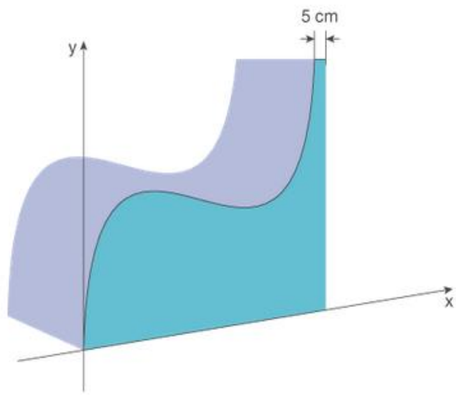
Drei Graphen der Schar sind in der Abbildung dargestellt.



1.1 Weise nach, dass alle Graphen der Schar bei $x_n = 0$ dieselbe Steigung haben.
Geben Sie eine weitere Eigenschaft von f_a an, die nicht von a beeinflusst wird.
Beschreiben Sie Eigenschaften des Graphen von f_a, die durch a beeinflusst werden.

1.2 Jeder Graph der Schar hat genau einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie seine Koordinaten und weisen Sie damit nach, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur y-Achse liegen.
Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.
Einer der Graphen der Schar hat an der Stelle $x_e = 3$ einen Extrempunkt.
Weisen Sie nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Funktion f_a.

Der abgebildete Designersessel hat Seitenflächen, die für $0 \le x \le 9$ aus der Fläche unter dem Graphen von $f_{0,06}$ der gegebenen Funktionenschar (oberster Graph in der Abbildung) und für $9 < x \le 9{,}5$ aus einem angesetzten Rechteck von 5 cm Breite bestehen (1 LE = 10 cm).



1.3 Die vordere Seitenfläche enthält auch die 5 cm breite Rechteckfläche am hinteren Rand.
Berechne die Größe der in der Abbildung sichtbaren Seitenfläche.
Die Seitenfläche soll grafisch neu gestaltet werden. Für die Grafik wird ein achsenparalleles Rechteck benötigt, das 32 cm hoch und möglichst breit sein soll.
Berechnen Sie die maximale Breite dieses Rechtecks und geben Sie an, welchen prozentualen Anteil die Rechteckfläche an der Seitenfläche hat.

Lösung

1.1 Es gilt: $f_a'(0) = 3{,}42$ damit ist die Steigung unabhängig vom Parameterwert.
Alle Graphen der Schar besitzen dieselbe Steigung.
z.B.: Monotonieverhalten
z.B.: Anzahl der Nullstellen/ Lage der Extrempunkte...

1.2 $x_W = \frac{14}{3}$

Einsetzen in $f_a(x)$ liefert:

$$f_a(x_W) = -\frac{5.488}{27} \cdot a + \frac{399}{25}$$

Die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_a ergeben sich zu $W_a\left(\frac{14}{3} \mid -\frac{5.488}{27} \cdot a + \frac{399}{25}\right)$.

▶ **Gleichung der Gerade der Wendepunkte bestimmen**

Damit alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur y-Achse liegen, müssen sie dieselbe x-Koordinate besitzen. Betrachte also die x-Koordinate von W_a.

Die x-Koordinate $x_W = \frac{14}{3}$ der Wendepunkte der Graphen von f_a ist unabhängig von a und damit bei allen Graphen gleich. Die Punkte W_a liegen demnach alle auf der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{14}{3}$, welche parallel zur y-Achse verläuft.

$f_a'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}06$

2. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Setze $x_e = 3$ in $f''_{0,06}(x)$ ein:

$f''_{0,06}(3) = -0{,}6 < 0$

Die Funktionsgleichung der Funktion f_a, deren Graph bei $x_e = 3$ einen Extrempunkt besitzt, lautet:

$f_{0,06}(x) = 0{,}06x^3 - 14 \cdot 0{,}06x^2 + 3{,}42x = 0{,}06x^3 - 0{,}84x^2 + 3{,}42x$

Wegen $f''_{0,06}(3) = -0{,}6 < 0$ ist die hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt erfüllt und damit handelt es sich um einen solchen.

1.3 **1. Schritt: A_1 berechnen**

Die Breite der Rechtsecksfläche ist laut Aufgabenstellung $b = 5$ cm. Die Länge ergibt sich aus der Gesamthöhe des Sessels $a = 64{,}8$ cm.

$$\begin{aligned} A_1 &= 5\,\text{cm} \cdot 64{,}8\,\text{cm} \\ &= 324\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

2. Schritt: A_2 berechnen

Den Befehl für ein Integral findest du in deinem CAS direkt neben dem Befehl für die Ableitung. Du erhältst dann:

$$\int_0^9 f_{0,06}(x)\,\mathrm{d}x = 32{,}805$$

Insgesamt ergibt sich also mit $A_2 = 32{,}805$ [FE] $= 3.280{,}5\,\text{cm}^2$:

$A = A_1 + A_2 = 324\,\text{cm}^2 + 3.280{,}5\,\text{cm}^2 = 3.604{,}5\ \text{cm}^2 \approx 0{,}36\,\text{m}^2$

Die Seitenfläche hat eine Größe von ca. $0{,}36\,\text{m}^2$.

▶ Maximale Breite berechnen

Legt man das Rechteck so tief wie möglich, liegt es direkt auf der x-Achse und wird nach oben hin durch die Gerade mit der Gleichung $y = 3,2$ begrenzt. Weil die Sitzfläche mit 32 cm gerade hoch genug liegt, kann nur noch der linke Rand des Sessels das Rechteck schneiden.

Legt man das Rechteck so weit nach rechts wie möglich, wird es durch die Gerade zu $x = 9,5$ begrenzt. Das Rechteck darf nun soweit nach links reichen, bis die obere Kante den Graphen schneidet.

Konkret bedeutet dies, dass der obere linke Eckpunkt des Rechtecks der linke Schnittpunkt des Graphen von $f_{0,06}$ mit der Geraden zu $y = 3,2$ ist.

Löse also $f_{0,06}(x) = 3,2$ nach x mit deinem CAS:

$x = 1,32742$

Die Breite des Rechtecks ergibt sich dann zu $9,5 - 1,32742$ LE $= 8,17258$ LE $\approx 81,73$ cm.

Das Rechteck kann maximal $81,73$ cm breit sein.

▶ Prozentualen Anteil berechnen

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt:

$A_{\text{Rechteck}} \approx 81,73 \cdot 32 \text{ cm}^2 = 2.615,36 \text{ cm}^2$

Der prozentuale Anteil ergibt sich dann:

$$p = \frac{A_{\text{Rechteck}}}{A_{\text{Seitenfläche}}} = \frac{2.615,36}{3.604,5} \approx 0,7256 = 72,56\,\%$$

Das Rechteck nimmt ca. $72,56\,\%$ der Seitenfläche ein.