Thema: Übungen zu Bedingter Wahrscheinlichkeit - stochastische Abhängigkeit - totale Wahrscheinlichkeit	**Arbeitsblatt 6/Stochastik**

1 Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter, die telefonische Anfragen von Kunden beantworten sollen. Herr Alleskönner kann 95 % aller Frage zur Zufriedenheit der Kunden beantworten, Frau Besserwisser 90 % und Herr Chancenlos gerade noch 70 %. Berechnen Sie unter der Annahme, dass alle drei Mitarbeiter gleich viele Telefonate beantworten, die Wahrscheinlichkeiten, dass

a) ein Kunde mit der Antwort, die er erhält, nicht zufrieden ist,
b) ein unzufriedener Kunde an Frau Besserwisser geraten ist,
c) eine Antwort, die zur Zufriedenheit des Kunden ausfiel, von Herrn Chancenlos gegeben wurde,
e) ein Kunde an Herrn Alleskönner gerät und eine zufriedenstellende Antwort bekommt.

2 In einer Urne liegen 12 Kugeln, die von 1 bis 12 nummeriert sind. Die Ereignisse $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ und $\mathbf{E_4}$ bedeuten, dass die gezogene Nummer durch 2, 3 bzw. 4 teilbar ist.
Untersuchen Sie, welche der Ereignisse $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ und $\mathbf{E_4}$ voneinander unabhängig sind.
Prüfen Sie alle Möglichkeiten.

3 Der Engländer GALTON (1822 – 1911) untersuchte den Zusammenhang der Augenfarbe an 1000 Vater-Sohn-Paaren.
Es bedeuten
A: Der Vater ist helläugig
B: Der Sohn ist helläugig.
Untersuchen Sie A und B auf stochastische Unabhängigkeit, wenn die Untersuchungsergebnisse (siehe Tabelle) gefunden wurden.

	B	$\bar{B}$
A	471	151
$\bar{A}$	148	230

4 In der Firma „Lungenembolie & Söhne" sind die Raucher unter den Mitarbeitern in der Vierfelder – Tafel erfasst worden.

	Frauen B	Männer $\bar{B}$	
Raucher A	200	800	1000
Nichtraucher $\bar{A}$	300	200	500
	500	1000	1500

a) Formulieren Sie mindestens 3 Aussagen, die Sie der Vierfeldertafel entnehmen können.

b) Berechnen Sie...
(1) ...die Wahrscheinlichkeit, eine Person anzutreffen, die Raucher ist.
(2) ...die Wahrscheinlichkeit, eine Frau anzutreffen.
(3) ...die Wahrscheinlichkeit, eine Raucherin anzutreffen.

c) Sie treffen eine Frau an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie Raucherin?
d) Überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

5 Die Wohnungen in der Weltstadt Bautzen werden nach zwei Kriterien eingeteilt; einmal nach der Wohnlage und dann danach, ob sie sich in einem Altbau oder einem Neubau befinden. Dabei gehören 40 % der Wohnungen zur einfachen, 35 % zur mittleren und 25 % zur besseren Wohnlage. Von den Wohnungen der einfachen Wohnlage sind 50 % Altbau, von denen der mittleren 40 % und von denen der besseren Wohnlage 30 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zufälligen Auswahl einer Wohnung aus dem gesamten Bestand an Wohnungen in unserer Weltstadt eine Altbauwohnung gezogen wird.

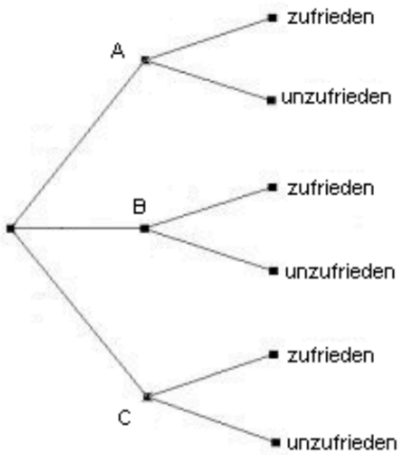
6 Auf einem Acker leiden 30 % der Salatköpfe an Schneckenbefall. Bei einer Untersuchung während der Ernte werden 97 % der tatsächlich befallenen Salatköpfe als befallen eingestuft.
Es werden aber auch 1 % der unversehrten Salatköpfe als befallen eingestuft.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Salatkopf als befallen eingestuft wird.

7 Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kommenden Tag zu 60 % schönes und zu 40 % schlechtes Wetter voraus; die Trefferquote liegt für die Voraussage "schön" bei 80% und für die Voraussage "schlecht" bei 90 %.
Ermitteln Sie, wie viele „schöne" Tage es gibt.

Lösungen

zu 1

Pfadregeln / Bedingte Wahrscheinlichkeit



$$p_A(z) = p(A \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 = 0{,}317$$

$$p_A(\bar{z}) = p(A \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 = 0{,}017$$

$$p_B(z) = p(B \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}90 = 0{,}300$$

$$p_B(\bar{z}) = p(B \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}10 = 0{,}033$$

$$p_C(z) = p(C \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}70 = 0{,}233$$

$$p_C(\bar{z}) = p(C \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}30 = 0{,}100$$

a) Ein Kunde ist mit der Antwort nicht zufrieden:

$$p(\bar{z}) = p_A(\bar{z}) + p_B(\bar{z}) + p_C(\bar{z}) = 0{,}017 + 0{,}033 + 0{,}100 = 0{,}15$$

b) Ein unzufriedener Kunde ist an B geraten:

$$p_{\bar{z}}(B) = \frac{p(B \cap \bar{z})}{p(\bar{z})} = \frac{0{,}033}{0{,}15} = 0{,}22$$

c) Eine zufriedenstellende Antwort wurde von C gegeben:

$$p_z(C) = \frac{p(C \cap z)}{p(z)} = \frac{p(C \cap z)}{1 - p(\bar{z})} = \frac{0{,}233}{0{,}85} = 0{,}274$$

d) Ein Kunde gerät an A und wird zufriedengestellt (schon im Baumdiagramm ermittelt):

$$p(A \cap z) = 0{,}317$$

zu 2

- $P(E_2) = P(\{2,4,6,8,10,12\}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
- $P(E_3) = P(\{3,6,9,12\}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- $P(E_4) = P(\{4,8,12\}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

und damit

(a) E_2 und E_3:

$$P(E_2 \cap E_3) = P(\{6,12\}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

E_2 und E_3 sind unabhängig.

(b) E_3 und E_4:

$$P(E_3 \cap E_4) = P(\{12\}) = \frac{1}{12}$$

$$P(E_3) \cdot P(E_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

E_3 und E_4 sind unabhängig.

(c) E_4 und E_2

$$P(E_4 \cap E_2) = P(\{4,8,12\} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_4) \cdot P(E_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

E_2 und E_4 sind unabhängig.

zu 3

Wie immer bei statistischen Untersuchungen verwendet man die ermittelten relativen Häufigkeiten als (sogenannte empirische) Wahrscheinlichkeiten.

Daher gilt:

$$P(A) = \frac{471+151}{1000} = 0{,}622 \ ,$$

$$P(B) = \frac{471+148}{1000} = 0{,}619 \quad \text{und}$$

$$P(A \cap B) = \frac{471}{1000} = 0{,}471.$$

Es folgt: $P(A) \cdot P(B) = 0{,}622 \cdot 0{,}619 \approx 0{,}385$

Obwohl man bei statistischen Untersuchungen mit Abweichungen rechnen muss, kann man dennoch sagen, dass $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ist, d.h. A und B muss man als abhängige Ereignisse ansehen. Die Vererbung ist also mit im Spiel!

zu 4

b) (1) Wahrscheinlichkeit, einen Raucher anzutreffen

$$P(A) = \frac{1000}{1500}$$

(2) Wahrscheinlichkeit, eine Frau anzutreffen

$$P(B) = \frac{500}{1500}$$

(3) Wahrscheinlichkeit, eine rauchende Frau anzutreffen. Hierbei ist die Schnittmenge „Frauen und Raucher" zu verwenden.

$$P(A \cap B) = ?$$

c) Wir beschränken unsere Berechnungen nun auf die Menge der Frauen. Es ist Bedingung, daß es eine Frau ist. Zur Verdeutlichung wird die Wahrscheinlichkeit als P_B angegeben. Der Anteil der Raucher in dieser Menge ist zu berechnen. Das ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter Bedingung B.

$$P_B(A) = \frac{200}{500}$$

d) Sind P(B) und $P_B(A)$ bekannt, kann $P(A \cap B)$ berechnet werden. Wir multiplizieren die Formel aus (4.) mit P(B)

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B) = \frac{200}{500} \cdot \frac{500}{1500} = \frac{200}{1500} = \frac{2}{15}$$

Sind die Ereignisse A und B unabhängig voneinander, gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

zu 5

Die Wohnungen der einfachen Wohnlage haben einen Anteil von 0.4. Davon ist ein Anteil von 0.5 Altbauwohnungen; nach dem Multiplikationssatz beträgt folglich der Anteil der Wohnungen in der Stadt, die beide Eigenschaften, einfache Wohnlage und Altbau haben,

$0.4 \cdot 0.5 = 0.2$.

Für die anderen beiden Wohnlagen erhalten wir:

mittlere Wohnlage: $0.35 \cdot 0.4 = 0.14$

bessere Wohnlage: $0.25 \cdot 0.3 = 0.075$

Zusammen beträgt der Anteil des Altbaubestandes

$$0.4 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.3 = 0.2 + 0.14 + 0.075 = 0.415.$$

zu 6

Wie wir der Aufgabe entnehmen können, werden sowohl tatsächlich befallene als auch unversehrte Salatköpfe als befallen eingestuft. Wir können also zwei Ereignisse definieren:

A: ein Salatkopf ist befallen

B: ein Salatkopf wird als befallen eingestuft

Die Ereignisse A_i, die für den Schichtungssatz vorausgesetzt werden, sind hier A und sein Komplement A^c . Wir können also den Schichtungssatz anwenden:

$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{A^c}(B) \cdot P(A^c)$

Um in die Gleichung Werte einsetzen zu können, müssen wir diese erst noch bestimmen. Sie gehen allerdings alle aus der Aufgabenstellung hervor:

$P(A) = 0{,}3 \Rightarrow P(A^c) = 0{,}7$

$P_A(B) = 0{,}97$

$P_{A^c}(B) = 0{,}01$

Jetzt können wir P(B) berechnen:

$P(B) = 0{,}97 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}298$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Salatkopf als befallen eingestuft wird, liegt also bei ca. 29,8%.

zu 7

- B: "morgen ist schönes Wetter"
- A_1: "Der Wetterbericht ist "schön"
- A_2: "Der Wetterbericht ist "schlecht"

(Klar: Es gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$)

Also:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0.6 * 0.8 + 0.4 * (1 - 0.9) = 0.52 = \underline{\underline{52\%}}.$$