Checkliste	Muss ich können zum Skalarprodukt	HM: GTR/Tafelwerk

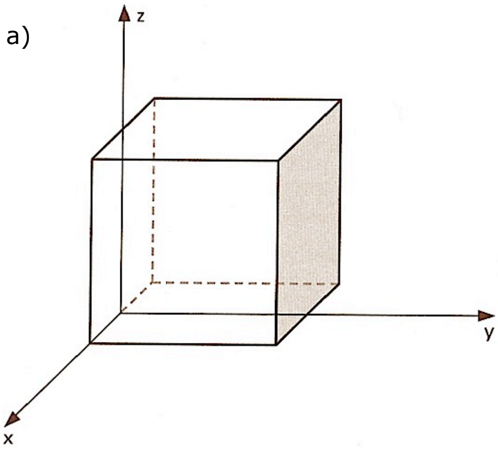
Aufgaben
* - Anforderungsbereich AB I **- Anforderungsbereich AB II
***- Anforderungsbereich AB III

Meine Einschätzung

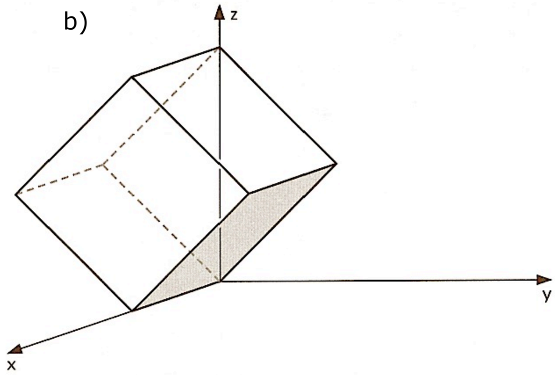
1 TÜ - WIEDERHOLUNG

Beide dargestellte Würfel haben die Kantenlänge 12.

a)



b)



Beschriften Sie: in Bild a): die Koordinaten der Seitenmittelpunkte
in Bild b): die Koordinaten aller Eckpunkte.

2* Berechnen Sie im Dreieck *ABC* die Seitenlängen und die Innenwinkel.
$A(2|-3|4)$, $B(-1|1|4)$ und $C(4|-1|3)$.
(ausführliche Lösungen zum Nachsehen finden Sie am Lehrertisch)

3 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a)* Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

b)* Bestimmen Sie je einen Vektor, der auf $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ senkrecht steht.

c)** Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

(ausführliche Lösungen zum Nachsehen finden Sie am Lehrertisch)

4 Gegeben sind die Punkte $A(1|-2|3)$, $B(5|2|1)$ und $C_k(5+2k|-1-k|4+2k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a)** Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für $k \neq -1$ gleichschenklig ist.

b)*** Für welchen Wert von k ist das Dreieck gleichseitig?

c)*** Für welchen Wert von k ist das Dreieck rechtwinklig?

(ausführliche Lösungen zum Nachsehen finden Sie am Lehrertisch)

5 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(15|21|3)$, $C(37|5|5)$ und $D(22|-16|2)$.

a)* Zeigen Sie, dass die Punkte *A, B, C* und *D* in einer Ebene liegen.

b)** Untersuchen Sie, ob *A, B,C* und *D* die Ecken eines Rhombus (eines Rechtecks, eines Quadrats) bilden.

6 Gegeben sind die Punkte $A(5|4|1)$, $B(0|4|1)$ und $C(0|1|5)$.

a)* Zeigen Sie, dass *A, B* und *C* Ecken eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind.

b)** Bestimmen Sie einen Punkt *D* so, dass die Punkte *A, B, C* und *D* Ecken eines Quadrats sind.

Lösung zu 2

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$; $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$; $\overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{-6+8+0}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \Rightarrow \alpha \approx 82{,}3^\circ ;$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{15+8-0}{5 \cdot \sqrt{30}} = \frac{23}{5 \cdot \sqrt{30}} \Rightarrow \beta \approx 32{,}9^\circ \; ; \; \gamma \approx 180^\circ - 32{,}9^\circ - 82{,}3^\circ = 64{,}8^\circ$$

Lösung zu 3

a) $\cos\varphi = \dfrac{-12-4+3}{\sqrt{36+4+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \dfrac{-13}{7 \cdot 3} \Rightarrow \varphi \approx 128{,}2^\circ$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$: z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$ und z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Für $\vec{c}$ muss gelten $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0 \Rightarrow$

(1) $6c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0$ und (2) $-2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

Eleminiere z.B. c_2 durch $(1)+(2) \Rightarrow 4c_1 + 4c_3 = 0$ und wähle nun frei $c_1 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$

und in (2) eingesetzt folgt $-2 + 2c_2 - 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1{,}5$ also $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung zu 4

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix}$;

$$\overline{AC_k} = \sqrt{16+16k+4k^2+1-2k+k^2+1+4k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$$

$$\overline{BC_k} = \sqrt{4k^2+9+6k+k^2+9+12k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2} \quad \text{also} \quad \overline{AC_k} = \overline{BC_k}$$

(Für $k = -1$ gilt $C_1(3/0/2)$ und C_1 ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].)

b) Das Dreieck ABC ist gleichseitig, falls gilt

$\overline{AC_k} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{16+16+4} = \sqrt{18+18k+9k^2} \Leftrightarrow 36 = 18+18k+9k^2 \Leftrightarrow$

$0 = -18+18k+9k^2 \Leftrightarrow k^2+2k-2 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (-2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 2}) = -1 \pm \sqrt{3}$

c) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, falls gilt $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8k+4k^2-3+2k+k^2+3+8k+4k^2 = 0 \Leftrightarrow$

$9k^2+18k = 0 \Leftrightarrow 9k \cdot (k+2) = 0 \Leftrightarrow k_3 = 0$; $k_4 = -2$