Philipp-Melanchthon-Gymnasium Bautzen Lk Mathematik Kl. 11

| SOL- Selbst organisiertes Lernen | Thema: Tangenten - und Normalenprobleme Übungsmaterial | Zeit: 3 UE |
|---|---|---|

Problem 1

| | |
|---|---|
| **Problem 1** | Ermittle die Gleichungen der Tangente und der Normalen im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ an das Schaubild.<br>a) $f(x)=3x^2-2x+1;\ x_0=0$ b) $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2;\ x_0=-1$ c) $f(x)=2x-\frac{1}{3x};\ x_0=1$<br>d) $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}+1;\ x_0=2{,}25$ e) $f(x)=2\cdot\sin x;\ x_0=\frac{\pi}{6}$ f) $f(x)=-\frac{1}{2}\cos(3x);\ x_0=\frac{\pi}{4}$ |

a) $P(0|1);\ f'(0)=-2;\ m_n=\frac{1}{2};\ t: y=-2x+1;\ n: y=\frac{1}{2}x+1$

b) $P\left(-1\middle|-\frac{3}{2}\right);\ f'(-1)=4;\ m_n=-\frac{1}{4};\ t: y=4x+\frac{5}{2};\ n: y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

c) $P\left(1\middle|\frac{5}{3}\right);\ f'(1)=\frac{7}{3};\ m_n=-\frac{3}{7};\ t: y=\frac{7}{3}x-\frac{2}{3};$

$n: y=-\frac{3}{7}x+\frac{44}{21}\approx -0,43x+2,10$

d) $P\left(\frac{9}{4}\middle|-\frac{1}{18}\right);\ f'\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{43}{81}\approx -0,53;\ m_n=\frac{81}{43}\approx 1,88;$

$t: y=-\frac{43}{81}x+\frac{41}{36}\approx -0,53x+1,139;$

$n: y=\frac{81}{43}x-\frac{6647}{1548}\approx 1,88x-4,294$

e) $P\left(\frac{\pi}{6}\middle|1\right);\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3};\ m_n=-\frac{1}{3}\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$

$t: y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}+1\approx 1,73x+0,093;$

$n: y=-\frac{1}{3}\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi+1\approx -0,577x+1,302$

f) $P\left(\frac{\pi}{4}\middle|\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1,061;\ m_n=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx -0,943;$

$t: y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{16}(3\pi-4)\approx 1,061x-0,479;\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

$n: y=-\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{\sqrt{2}}{12}(2\pi+3)\approx -0,943x+1,094$

**Problem 2**

Zeichne die Schaubilder von f und g im gleichen Koordinatensystem. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte beider Schaubilder. Berechne (auf 1 Dezimale) für jeden Schnittpunkt den Winkel $\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 90°)$, den die Tangenten an die Schaubilder einschließen.

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = 1 - x^2$

a) $S_1(0|0)$; $S_2(1|1)$: $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$; $g'(0) = 2$, $g'(1) = 0$;

$\alpha$ bei $S_1$ aus $\tan\alpha = 2$ gibt $\alpha = 63{,}43°$.

$\beta$ bei $S_2$ aus $\tan\beta = 2$ gibt ebenfalls $\beta = 63{,}43°$ (Fig. 26.14a)

b) Schnittbedingung $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ äqu $(x^2 - 1)(x + 1) = 0$ äqu $(x - 1)(x + 1)^2 = 0$;

$S_1(1|0)$; $S_2(-1|0)$; $f'(1) = 2$, $f'(-1) = 2$; $g'(1) = -2$, $g'(-1) = 2$. Die Schaubilder von f und g haben bei $S_2$ dieselbe Steigung, Schnittwinkel in $S_2$ somit $0°$, die Kurven berühren sich in $S_2$.

$\alpha$ in $S_1$ ist $\alpha = 180° - 63{,}43° - 63{,}43° = 53{,}14°$ (Fig. 26.14b)

**Problem 3**

Ermittle die Gleichung derjenigen Tangente an das Schaubild von f, welche zur gegebenen Geraden g parallel ist. Gib die Koordinaten des Berührpunktes B an.

a) $f(x) = x^2$; $g: y = 2x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g: y = \frac{1}{3}x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$; $g: x + 4y = 0$

d) $f(x) = |x|^3$; $g: y = -12x$

Hat die Gerade g die Steigung $m_g$, dann ist die Bedingung für die Abszisse des Berührpunktes $x_B$ die Gleichung $f'(x_B) = m_g$.

a) $B(1|1)$ $t: y = 2x - 1$

b) $\frac{1}{2\sqrt{x_B}} = \frac{1}{3}$ gibt $x_B = \frac{9}{4}$; $B\left(\frac{9}{4}\middle|\frac{3}{2}\right)$; $t: y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$

c) $B_1\left(2\middle|\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(-2\middle|-\frac{1}{2}\right)$; $t_1: y = -\frac{1}{4}x + 1$; $t_2: y = -\frac{1}{4}x - 1$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$; da $m_g = -12 < 0$ ist, ist $f'(x) = -3x^2$ für $x < 0$;

$x_B$ aus $-3x^2 = -12$ gibt $x_B = -2$ als einzige Lösung, somit $B(-2|8)$;

$t: y = -12x - 16$.

| **Problem 4** | Ermittle die Schnittwinkel der Funktionen mit den Koordinatenachsen.<br>a) $f(x)=x^3-3x$ b) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$ c) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ |
|---|---|

a) $N_1(0|0)$; $N_2(\sqrt{3}|0)$; $N_3(-\sqrt{3}|0)$; $f'(0)=-3$; $f'(\pm\sqrt{3})=6$;
$t_1: y=-3x$; $t_2: y=6x-6\sqrt{3}$; $(6\sqrt{3}\approx 10,39)$
$t_3: y=6x+6\sqrt{3}$ (Fig. 26.12a)

b) $N_1(0|0)$; $N_2(2|0)$; $N_3(-2|0)$; $f'(0)=0$; $f'(2)=8$; $f'(-2)=-8$;
$t_1: y=0$ ($N_1$ ist Berührpunkt der x-Achse); $t_2: y=8x-16$;
$t_3: y=-8x-16$; (Fig. 26.12b)

c) $N_1(1|0)$; $N_2(-1|0)$; $f'(1)=2$; $f'(-1)=2$;
$t_1: y=2x-2$; $t_2: y=2x+2$ (Fig. 25.4b)

| **Problem 5** | Zeige, dass die Gerade y = 2x +0,5 Tangente an den Graphen der Funktion y = x – 0,5x² ist.<br>Gib die Koordinaten des Berührpunktes an.<br>Ermittle die Gleichung der zugehörigen Normalen. |
|---|---|

Schnitt: $2x+0,5=x-0,5x^2 \Rightarrow (x_0+1)^2=0 \Rightarrow x_0=-1 \Rightarrow B(-1|-\frac{3}{2})$

Normale $n$: $y=-\frac{1}{2}x-2$

**Problem 6**

Vom Punkt P(-1|-1) sind zwei Tangenten an den Graphen der Funktion f mit f(x) = $x^2$ gezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Tangenten.

c) Berechnen Sie den Mittelpunkt der Strecke zwischen den Berührungspunkten. Was fällt auf?

(6) Lösung:

a) Tangente durch $P(-1 \mid -1)$ an f: $y = 2a(x-a) + a^2$

mit $-1 = 2a(-1-a) + a^2 \Leftrightarrow a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Berührpunkte $A\left(-1-\sqrt{2} \mid 3+2\sqrt{2}\right)$, $B\left(-1+\sqrt{2} \mid 3-2\sqrt{2}\right)$

b) Tangente durch A: $t_A(x) = -2\left(1+\sqrt{2}\right)x - 3 - 2\sqrt{2}$

Tangente durch B: $t_B(x) = 2\left(-1+\sqrt{2}\right)x - 3 + 2\sqrt{2}$

c) $M\left(\frac{-1-\sqrt{2}+\left(-1+\sqrt{2}\right)}{2} \middle| \frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{2}\right) = M(-1 \mid 3)$