

Mein Ma-ABI $45^2 + 1$	THEMA: Schwerpunkt B1	langfristige Aufgabe 2 HM: MMS/Formelsammlung
---------------------------	--------------------------	--



auch erhältlich auf
www.maphyside.de

- 1 Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $f: t \mapsto 25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und $f(t)$ die Wassertemperatur in $^{\circ}\text{C}$. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25°C .
- 1.1 Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12°C beträgt.
Erreichbare BE-Anzahl: 03
- 1.2 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Wassertemperatur innerhalb der ersten 30 Minuten. Berechnen Sie $f'(30)$ und geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.
Erreichbare BE-Anzahl: 04
- 1.3 Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t^* dauert es eine gewisse Zeit, bis die Wassertemperatur den Mittelwert zwischen der Temperatur zum Zeitpunkt t^* und der Raumtemperatur angenommen hat.
Zeigen Sie, dass diese Zeitdauer unabhängig von t^* ist.
Erreichbare BE-Anzahl: 04

Bei einem anderen Vorgang wird die Entwicklung der Temperatur von Wasser in einem zweiten Glas durch die in \mathbb{R} definierte Funktion $g: t \mapsto 5 + 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$ modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $g(t)$ die Wassertemperatur in $^{\circ}\text{C}$. Bei den durch f und g beschriebenen Vorgängen sind die durch $t = 0$ festgelegten Zeitpunkte identisch.

- 1.4 Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f erzeugt werden kann.
Erreichbare BE-Anzahl: 02
- 1.5 Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:
I Die Temperatur des Wassers im zweiten Glas nimmt während des gesamten Beobachtungszeitraums ab.
II Für beide Gläser stimmen zu jedem Zeitpunkt die Beträge der momentanen Änderungsraten der Wassertemperaturen überein.
Erreichbare BE-Anzahl: 04

2 Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion h mit $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit H bezeichnet.

- 2.1 Geben Sie den Grenzwert von h für $x \rightarrow -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Funktionsterms.
Erreichbare BE-Anzahl: 03
- 2.2 Es gibt eine Zahl $b > 1$, sodass die Fläche, die H , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ im vierten Quadranten einschließen, den gleichen Inhalt hat wie die Fläche, die H mit der x -Achse im ersten und zweiten Quadranten einschließt.
Bestimmen Sie b .
Erreichbare BE-Anzahl: 03

- 2.3 Gegeben ist die in $] -\infty; -1]$ definierte Funktion k mit $k(x) = \int_x^{-1} h(t) dt$. Ihr Graph wird mit K bezeichnet. Abbildung 1 zeigt H und K . Für $x \rightarrow -\infty$ kommt K der Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ beliebig nahe.

Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass k die Nullstelle -1 besitzt und dass K im Bereich $x < -1$ unterhalb der x -Achse verläuft.

Deuten Sie damit unter Verwendung von Abbildung 1 den Wert $-\frac{4}{e}$ in Bezug auf H geometrisch.

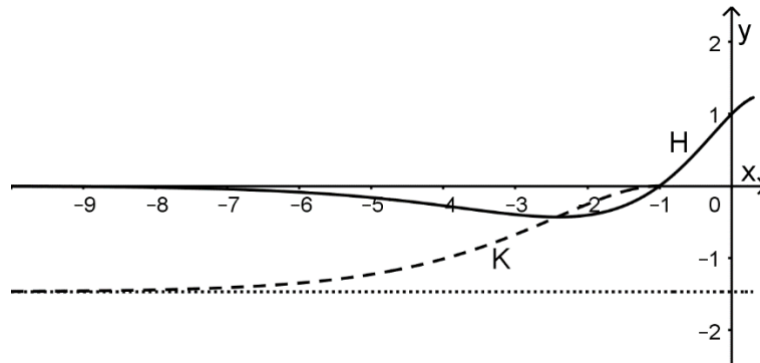


Abb. 1

Erreichbare BE-Anzahl: 05

Die Funktion h gehört zur Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen h_a mit $h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (a - x^2) \cdot e^x$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von h_a wird mit H_a bezeichnet.

- 2.4 Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktionswerte von h_a nur für $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ positiv sind.
- 2.5 Es gibt einen Wert von a , sodass das Produkt der x -Koordinaten der beiden Extrempunkte von H_a gleich dem Produkt der y -Koordinaten dieser beiden Punkte ist. Berechnen Sie diesen Wert von a .

Erreichbare BE-Anzahl: 03

Erreichbare BE-Anzahl: 05

- 2.6 Die Schnittpunkte von H_a mit der x -Achse und der Hochpunkt von H_a sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Dieses Dreieck rotiert um die x -Achse. Die in \mathbb{R}^+ definierte Funktion v gibt das Volumen dieses Rotationskörpers in Abhängigkeit von a an. Abbildung 2 zeigt drei Graphen G_1, G_2 und G_3 , von denen einer die Ableitungsfunktion v' von v darstellt.

Beurteilen Sie ohne Rechnung und unter Verwendung der Tatsache, dass die y -Koordinate des Hochpunkts von H_a umso größer ist, je größer der Wert von a ist, welcher Graph dies ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

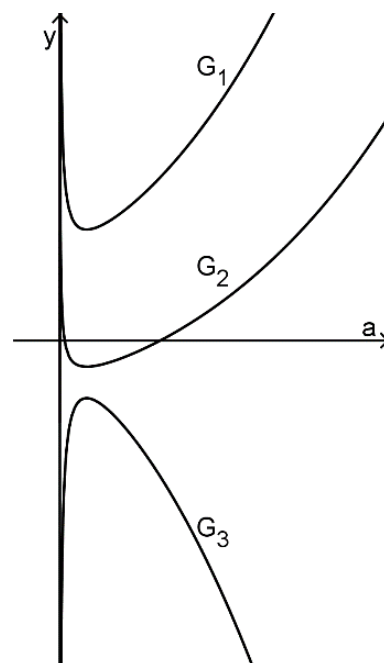


Abb. 2

Mein Ma-ABI $45^2 + 1$	THEMA: Schwerpunkt B1	langfristige Aufgabe 2 HM: MMS/Formelsammlung	Lösungen
---------------------------	--------------------------	---	----------

- 1.1 Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme: 5°C
 $f(t) = 12$ liefert $t \approx 30,8$.
 Somit hat das Wasser etwa 31 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 12°C .
03 BE
- 1.2 mittlere Änderungsrate in $\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$: $\frac{f(30) - f(0)}{30 - 0} \approx 0,23$
 $f'(30) \approx 0,18$
 Die momentane Änderungsrate der Wassertemperatur 30 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $0,18 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$.
04 BE
- 1.3 Für jeden Zeitpunkt t^* liefert die Gleichung $f(t) = \frac{25 + f(t^*)}{2}$ eine Lösung t , mit der die Differenz $t - t^*$ den Wert $\frac{500}{7} \cdot \ln 2$ annimmt und damit unabhängig von t^* ist.
04 BE
- 1.4 Der Graph von g kann aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der t -Achse und Verschiebung um 30 in positive y -Richtung erzeugt werden.
02 BE
- 1.5 Die Aussage I ist richtig. Der Graph von g ist streng monoton fallend.
 Die Aussage II ist richtig. Für alle $t \geq 0$ gilt $|f'(t)| = |g'(t)|$.
04 BE
- 2.1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$
 Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Für h als ein Produkt aus der natürlichen Exponentialfunktion und einer ganzrationalen Funktion ist der Grenzwert 0.
03 BE
- 2.2 $\int_{-1}^b h(x) dx = 0$ liefert $b \approx 1,56$.
03 BE
- 2.3 $k(-1) = 0$, da bei übereinstimmenden Grenzen des Integrals dieses den Wert 0 hat.
 Für $x < -1$ ist $k(x) < 0$, da H in diesem Bereich unterhalb der x -Achse verläuft.
 Für $c < -1$ gibt der Betrag von $\int_c h(t) dt$ den Inhalt der Fläche an, den H und die x -Achse zwischen den Geraden mit den Gleichungen $x = c$ und $x = -1$ einschließen. Die Annäherung von K an die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ bedeutet daher für H geometrisch, dass der Inhalt der oben beschriebenen Fläche für kleiner werdende Werte von c dem Wert $\frac{4}{e}$ beliebig nahe kommt.
05 BE
- 2.4 $h_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}$
 Für $a \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\frac{1}{a} > 0$ und $e^x > 0$. Dann ist $h_a(x)$ genau dann positiv, wenn $(a - x^2) > 0$ ist, also für alle x -Werte zwischen den beiden Nullstellen.
03 BE
- 2.5 $h'_a(x) = 0$ liefert $x_1 = -1 - \sqrt{a+1}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{a+1}$.
 Die Gleichung $x_1 \cdot x_2 = h_a(x_1) \cdot h_a(x_2)$ besitzt $a = \frac{2}{e}$ als einzige positive Lösung.
05 BE
- 2.6 Der Rotationskörper setzt sich aus zwei Kegeln mit gleicher Grundfläche zusammen. Sein Volumen nimmt sowohl mit größer werdendem Radius als auch mit größer werdendem Abstand der beiden Spitzen zu. Dabei entspricht der Radius der Höhe des Dreiecks, also der y -Koordinate des Hochpunkts, und der Abstand der Spitzen des Doppelkegels dem Abstand der beiden Nullstellen von h_a . Beide Größen nehmen mit ansteigendem Wert von a zu. Die Funktion v ist somit monoton wachsend und v' nimmt folglich keine negativen Funktionswerte an, sodass nur G_1 infrage kommt.
04 BE
40 BE