Checkliste | Mein „Wieder-in-Stochastik-reinkomm-Blatt“ | *HM: GTR/Tafelwerk*

Aufgabe	Meine Einschätzung		

1 Bei einem Sehtest achtjähriger Schulkinder einer Großstadt wurden 4445 Jungen und 4379 Mädchen untersucht. Man fand bei den Jungen 268 und bei den Mädchen 256 Brillenträger.

a) Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf und tragen Sie die prozentualen Häufigkeiten ein.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.
A: Ein ausgewähltes Kind ist ein Junge. B: Ein Kind ist Brillenträger.
Sind A und B unabhängige Ereignisse?

(ausführliche Lösungen/Hilfen finden Sie am Lehrertisch)

2 Ein Gerät ist mit der Wahrscheinlichkeit 8,8% unbrauchbar. Beim Test wird ein brauchbares Gerät versehentlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ausgesondert.
Insgesamt werden 10% aller Geräte ausgesondert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein unbrauchbares Gerät ausgesondert?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesondertes Gerät unbrauchbar.

(ausführliche Lösungen/Hilfen finden Sie am Lehrertisch)

3 Die Produktion eines Produktes läuft über drei parallele Fertigungsstraßen. Die fertigen Teile werden im Lager gesammelt.
Für die drei Straßen gelten folgende Werte:

Straße 1: 750 Teile / Stunde	80% sind einwandfrei
Straße 2: 800 Teile / Stunde	85% sind einwandfrei
Straße 3: 1000 Teile / Stunde	65% sind einwandfrei

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgenommenes intaktes Bauteil von der ersten Fertigungsstraße stammt.

(ausführliche Lösungen/Hilfen finden Sie am Lehrertisch)

4 Anlässlich der Kinopremiere eines neuen Kinokrachers plant ein Süßwarenhersteller eine Großproduktion von Überraschungseiern, von denen jedes fünfte (ein so genanntes Comic-Ei) eine Comicfigur aus dem Film enthalten soll. Zum Versand werden Paletten durch ein Zufallsprogramm mit Eiern bestückt. Comic-Eier sind von anderen Überraschungseiern äußerlich nicht zu unterscheiden. Juli und Anne kaufen für ihre nächste „Superhelden – Fete“ in einem Supermarkt 20 Überraschungseier.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden

- in den zwanzig Eiern genau vier Comicfiguren finden,
- in den zwanzig Eiern mindestens sechs Comicfiguren finden,
- (genau) im fünftem Ei die erste Comicfigur steckt.

Die Marktforschungsabteilung des Süßwarenherstellers hat zur Neueinführung der Comic-Eier das Kaufverhalten der Kunden einer Supermarktkette untersucht.
Im Marktforschungsbericht ist zu lesen:
„Von den befragten Kunden waren 54,3% weiblich. Während 63,1% der weiblichen Kunden ein Überraschungsei kaufen, tun dies nur 52,5% der männlichen Kunden.“

b) Stellen sie die Daten des Marktforschungsberichtes in einer geeigneten Übersicht dar.

Ein Kunde, der ein Überraschungsei gekauft hat, wird zufällig ausgewählt.
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde männlich ist?

An einer 25er-Palette gewöhnlicher Überraschungseier hatte die Supermarktkette bislang 5 € Gewinn. In einer Werbeaktion werden jedem Kunden 50 € versprochen, der eine ganze 25er-Palette Überraschungseier kauft und keine einzige Comicfigur findet. Der Marktleiter geht von dem ungünstigsten Fall aus, dass alle Kunden, die keine Figur finden, sich auch melden und die Prämie einfordern.
d) Bestimmen Sie den mittleren Gewinn pro Palette, den der Supermarkt während der Werbeaktion erwarten kann.

(ausführliche Lösungen/Hilfen finden Sie am Lehrertisch)

Lösung Aufgabe 1

Wir berechnen die relativen Häufigkeiten und verwenden diese als (empirische) Wahrscheinlichkeiten:

	B	$\overline{B}$	
A	268 0,0304		4445 0,5037
$\overline{A}$	256		4379
	524 0,0594		8824

$P(A)=\frac{4445}{8824}\approx 0{,}5037$, $P(B)=\frac{524}{8824}\approx 0{,}0594$ und $P(A\cap B)=\frac{268}{8824}\approx 0{,}0304$

Daraus folgt:

$P(A)\cdot P(B)=0{,}5037\cdot 0{,}0594\approx 0{,}0299$

Die Abweichung beträgt $P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}0304-0{,}0299=0{,}0005$.

Wir können also beide Ergebnisse als gleich groß ansehen.

Ergebnis:

Da $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ sind A und B unabhängige Ereignisse.

Lösung Aufgabe 2

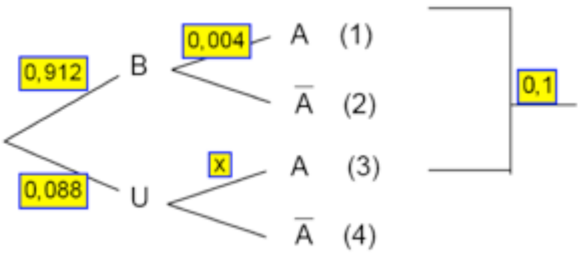
Vorbereitung:

Es sei A das Ereignis: "Das Gerät wird ausgesondert" und U das Ereignis: "Das Gerät ist unbrauchbar (defekt)", B: "Das Gerät ist brauchbar".

Gegeben sind: $P(U) = 0{,}088$, $P_B(A) = 0{,}04$ sowie $P(A) = 0{,}1$.

Also folgt: $P(B) = 1 - 0{,}088 = 0{,}912$

a) Baumdiagramm:



P(A) = 0,1 totale Wkt.

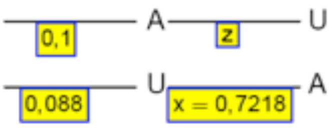
x läßt sich aus der totalen Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0{,}1$ berechnen, denn diese totale Wahrscheinlichkeit ergibt sich andererseits aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade (1) und (2): $P(A) = 0{,}912\cdot 0{,}04+0{,}088\cdot x$

Also gilt: $0{,}912\cdot 0{,}04+0{,}088\cdot x=0{,}1$

Daraus folgt $x=\dfrac{0{,}1-0{,}912\cdot 0{,}04}{0{,}088}=0{,}7218=P_U(A)$

Die Antwort zu a) steht also fest: Ein unbrauchbares Gerät wird mit 72,2% Wahrscheinlichkeit ausgesondert.

b) Für diese Frage muß der Baum gestürzt werden, denn wir benötigen den Pfad (4) in umgekehrter Abfolge:



während im obigen Baum dieser Pfad so aussieht:

Da beide Pfade das Ereignis $A\cap U$ darstellen, haben sie dieselbe Wahrscheinlichkeit:

$0{,}1\cdot z=0{,}088\cdot 0{,}7218$

also $z=P_U(A)=\dfrac{0{,}088\cdot 0{,}7218}{0{,}1}=0{,}6352$

Lösung Aufgabe 3

Lösung mit Satz von Bayes:

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(B\mid A_1)\cdot P(A_1)}{P(B\mid A_1)\cdot P(A_1)+P(B\mid A_2)\cdot P(A_2)+P(B\mid A_3)\cdot P(A_3)}$$

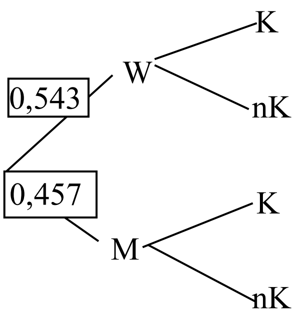
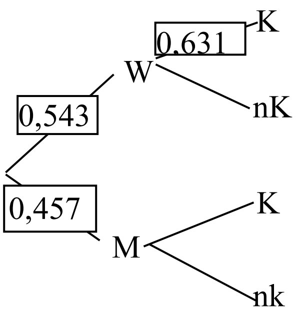
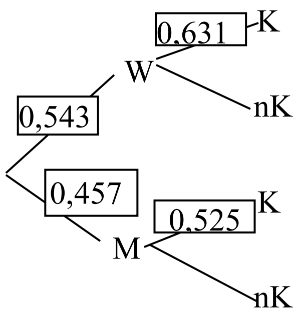
$$=\frac{\dfrac{0{,}8\cdot 750}{750+800+1000}}{\dfrac{0{,}8\cdot 750}{2550}+\dfrac{0{,}85\cdot 800}{2550}+\dfrac{0{,}65\cdot 1000}{2550}}$$

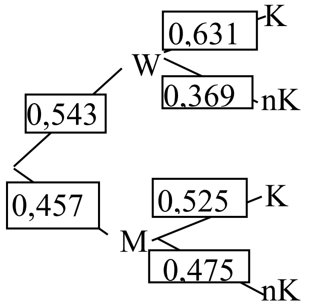
$$=\frac{0{,}8\cdot 750}{0{,}8\cdot 750+0{,}85\cdot 800+0{,}65\cdot 1000}$$

$$=\underline{\underline{0{,}31}}$$

Lösung Aufgabe 4

zu a)

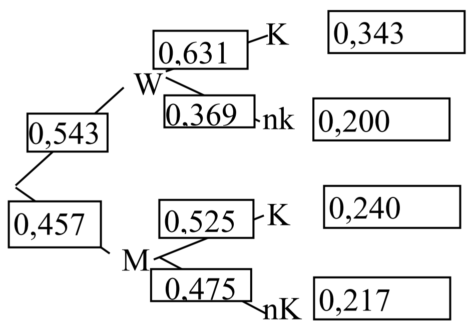
Term/Formeln & Erklärungen der Lösungswege	
„Jedes fünfte Ei“ bedeutet $p = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$	Berechnung des Anteils
Mit n=20 und p=0,2 ergibt sich	Nutzung z.B. Programm Stochastik/Binomialvert
$P(X = 4) = 0{,}218$	Mit GTR Casio CFX-9850GC (oder vergleichbares Modell) $P_{0,2}(X = 4)$ wird errechnet mit Hilfe Menü Stat (->2); Untermenü DIST (->F5); Untermenü BINM (->F5); Bpd (-> F1) Eingabe Var (-> F2) X:4 Numtrial: 20 p:0,2 oder Wert aus der Tabelle ablesen. VORSICHT - Verwechselungsgefahr! Bcd berechnet kumulierte Wahrscheinlichkeiten.
$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0{,}804 = 0{,}196$	
$p = 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}082$	
zu b) und c) 	Bedingendes Merkmal ist das Geschlecht. (1) 54,3% der Kunden sind weiblich
	(2) 63,1% aller Frauen kaufen ein Überraschungsei.
	(3) und 52,5% aller Männer kaufen ein Überraschungsei



Ergänzung der fehlenden Pfadwahrscheinlichkeiten

1-0,631=0,369

1-0,525=0,475



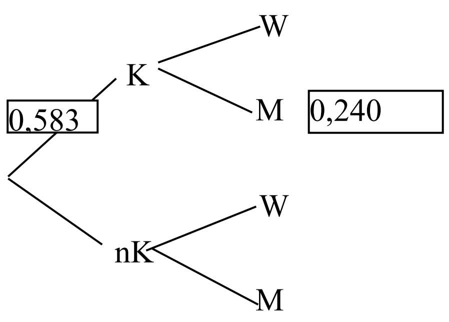
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln (Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet)

$P(W \cap K)$=0,543*0,631=0,343
$P(W \cap nK)$ =0,543*0,369=0,200
$P(M \cap K)$ =0,457*0,525=0,240
$P(M \cap nK)$ =0,457*0,475=0,217

In %	Käufer	Nichtkäufer	Summe
Weiblich	34,3	20,0	54,3
Männlich	24,0	21,7	45,7
Summe	58,3	41,7	100

Ergänzung der Vierfeldertafel

Umkehrung des Baumdiagrammes



Das Kaufverhalten ist bedingendes Merkmal.

Der Anteil der Käufer beträgt 58,3% (siehe Vierfeldertafel).

24,0% aller Kunden sind Männer die Überraschungseier kaufen, also Käufer sind. (UND-Ereignis).

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_K(M) = \frac{P(K \cap M)}{P(K)} = \frac{0{,}240}{0{,}583} = 0{,}412 \text{ (gerundet)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der ein Überraschungsei kauft männlich ist beträgt ca. 41,2%

zu d)

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich: Gewinn pro Palette: 5€ Verlust ggf. 45 € = 50€ - 5€	Der Verlust ergibt sich aus den 50€, die ausgezahlt werden, falls keine Comic-Figur gefunden wird, abzgl. den 5€ Gewinn, die der Supermarkt andernfalls gemacht hätte.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust beträgt P(Verlust)=$0{,}8^{25}$=0,003777...	Mit einer Wahrscheinlichkeit von p=0,8 ist in einem Ei keine Comicfigur. Auf einer Palette sind 25 Eier.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (von 5€) für den Supermarkt beträgt demnach P(Gewinn)=$1-0{,}8^{25}$=0,9962..	
Erwartungswert $E(X) = 5€ \cdot (1 - 0{,}8^{25}) - 45€ \cdot 0{,}8^{25} = 4{,}81\,€$	
Der durchschnittliche Gewinn pro Palette ist 4,81€	