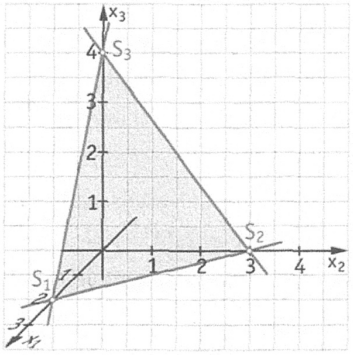
Übungsblatt **Thema: Klausurübung Teil A - Lösungen** **Klausur 2**

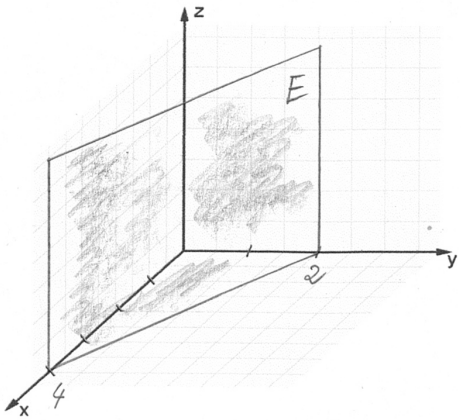


1

a) Geben Sie die Koordinatengleichung der Ebene, deren Ausschnitt dargestellt ist.

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Rightarrow 6x + 4y + 3z = 12$

b) Zeichnen Sie einen Ausschnitt der Ebene x + 2y = 4 in die Abbildung.



2 Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

Welches Intervall beschreibt die Strecke $\overline{AB}$ mit $A(1|1|7)$ und $B(1|-1|13)$?

☐	☒	☐	☐	☐
$t \geq 0$	$1 \leq t \leq 3$	$1 < t < 3$	$0 \leq t \leq 2$	$t \leq 3$

Für Aufgabe 1 und 2 erreichbare BE-Anzahl: **4**

3 Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|5)$, $B(2|5|5)$, $C(4|3|2)$ und $D(10|-6|12)$.

a) Zeigen Sie, dass diese Punkte die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide bilden.

Ansatz: • ABC bilden Ebene E_{ABC} mit $E_{ABC}: -6x + 9y - 10z = -17$ (Bsp.)

• D ∈ E_{ABC} ↳ $-6 \cdot (10) + 9 \cdot (-6) - 10 \cdot (12) = -17$ (✓) ↳ ABCD bilden dreiseitige Pyramide

b) Bestimmen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide.

Ansatz: $V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$ $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{217}{6}}}$

$\vec{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Erreichbare BE – Anzahl: **6**

4 Die Ebene E ist gegeben durch die Punkte $A(3|3|4)$, $B(4|3|4)$ und $C(5|0|6)$.

a) Bestimmen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E.

Ansatz: $E_{ABC}: 2y + 3z = 18$ (Bsp.) HNF $E_{ABC}: \frac{2y + 3z - 18}{\sqrt{13}} = 0$ $\underline{\underline{d(O;E) = \left|\frac{18}{\sqrt{13}}\right|}}$

b) Beschreiben Sie in Stichworten, wie der Abstand eines Punkte P von der Ebene E bestimmt wird.

Gegeben ist die Ebene H mit $H: 4 \cdot y + c \cdot z = 24$.

c) Bestimmen Sie den Parameter c so, dass die Ebenen E und H parallel sind.

Ansatz: $\vec{n}_E = \lambda \cdot \vec{n}_H$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{c = 6}}$

Erreichbare BE – Anzahl: **6**

5 Der Punkt $P(3|4|-2)$ wird an der Ebene $E: 2 \cdot x - y + z = 6$ gespiegelt.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes von P.

Erreichbare BE – Anzahl: **4**

Ansatz: P' ist Spiegelpunkt zu P an E

$\vec{P'} = \vec{P} + 2 \cdot d \cdot \vec{n}_0 \Rightarrow \vec{P'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(7|2|0)$

HNF von E: $\frac{2x - y + z - 6}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow d(P,E) = \left|\frac{6}{\sqrt{6}}\right|$ $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Klausur 2 2019

Lösung zu 1.

a) ε_1 durch $E(4;-4;8)$ $F(4;4;8)$ $H(0;0;15)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\4\\7\end{pmatrix}$ ✓ $\rightarrow$ $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}7\\0\\4\end{pmatrix}$ ✓ ε_1: $7x+4z=60$ ✓

ε_2 durch $F(4;4;8)$ $G(-4;4;8)$ $H(0;0;15)$ 6

$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}$ ✓ $\rightarrow$ $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\7\\4\end{pmatrix}$ ✓ ε_2 $7y+4z=60$ ✓

b) MP $\overline{EF}$ $\vec{m} = \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$ ✓ $\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-4\\-4\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}\right)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-20\\0\\3\end{pmatrix}$ ✓

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-8\\0\\31\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\0\\\frac{31}{3}\end{pmatrix}$ ✓

$\vec{a}$ durch gesucht und $\vec{n}$ der Ebene

$\rightarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$; $\begin{pmatrix}7\\0\\20\end{pmatrix} = -\vec{n}$ 5

$-7x+20z=c$

$7\cdot 4 + 160 = c$ $c = 188$

$-7x+20z=188$ ✓

c) Blick auf Δ: Grundkante $\overline{FG} = 8m$ $m = \begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}$ $d(K;\overline{FG})$?

$d(K;\overline{FG}) = \sqrt{0^2+16+49} = \sqrt{65}$ ✓ 129 m² Dach ohne Überstand kostet 18318 ohne MwSt

$A_G = \frac{1}{2}g\cdot h_G = \frac{1}{2}8m\cdot\sqrt{65}m = 16\cdot\sqrt{65}m^2 = 129m^2$ ✓ 21798,42 m.M. ✓ 5

– Skonto: 435,97€

Kosten: 21362,45€

d) $S(0;0;18)$; $T(0;y_1;0)$; $T'(0;y_1;1,6)$

Gerade durch S u. E MP von FG $(0;4;8)$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-16\end{pmatrix}$ ✓

T' in E h: $\begin{pmatrix}0\\y_1\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-10\end{pmatrix}$ ✓ $y_1 = 4t$ ✓

$1,6 = 18-10t$ $t = 1,64$ $\rightarrow y_1 = 6,56m$ ✓

e) $M(0|-4|8)$ ist Mittelpunkt von $\overline{EH}$

$$d(M;\varepsilon_2) = \left|\frac{7\cdot(-4)+4\cdot 8-60}{\sqrt{49+16}}\right| = \frac{56}{\sqrt{65}} \approx 6{,}95\,\text{m}$$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\4\end{pmatrix}$; g schneidet die z-Achse im Punkt $R\left(0|0|\frac{72}{7}\right)$

g durchstößt die x–y–Ebene im Punkt $D(0|-18|0)$

Lösung zu 2.

Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear, damit liegen die Punkte

a) A, B und C nicht auf einer Geraden und sind Eckpunkte eines Dreiecks.

$$\overrightarrow{AD}_k = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2k-2\\2k+2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow (2k+2=0 \wedge 2k-2=-4) \Leftrightarrow k=-1$$

b) Berechnung von *r* i n Abhängigkeit von *k*

$$\begin{pmatrix} 1-2k+1 \\ -1+r-2k-1 \\ 1+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r-2k-2=0$$

$$\Leftrightarrow r=2k+2$$

Damit ergibt sich $F_k(1\,|\,2k+1\,|\,1)$ und $\overrightarrow{F_kD_k}(2k-2\,|\,0\,|\,-6)$.

Berechnung des minimalen Abstandes: $\left|\overrightarrow{F_kD_k}\right| = 2\sqrt{k^2-2k+10}$.

Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion wird dieser Abstand am kleinsten, wenn der Radikand ein (globales) Minimum annimmt. Das befindet sich bei einer quadratischen Funktion an der Scheitelpunktsstelle, d. h. k = 1 und $D_1(1\,|\,3\,|\,-5)$.

Lösung Aufgabe 3

$n=6$ $P(1)=\frac{1}{10}$ $P(2)=\frac{2}{10}$ $P(3)=\frac{3}{10}$ $P(4)=\frac{4}{10}$

$P(A)=\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=0{,}000048$

$P(C)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^3\approx 0{,}1852$

$S=23$ $P(444443)=\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(\frac{3}{10}\right)6$

$P(B)=\left(\frac{4}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{10}\right)\cdot 6\approx 0{,}0184$

$P(D)=1-[P(\text{nur gerade})+P(\text{nur ungerade})]$

$=1\left[\left(\frac{6}{10}\right)^6+\left(\frac{4}{10}\right)^4\right]$

$=0{,}9492$

„3 x mindestens – Aufgabe"

Ansatz: $P(X\geq 2)\geq 0{,}99$ GTR Ansatz: 1-BinomialCD(1,x,0.4)

ab n = 14 ist *P(X)* = 0,9919 d.h. mindestens 14 Kugeln

Lösung Aufgabe 4

a) $P(A)=0{,}03\cdot 0{,}2+0{,}05\cdot 0{,}2+0{,}04\cdot 0{,}6=0{,}04$

b) Maschine 1 $\frac{0{,}03\cdot 0{,}2}{\frac{4}{100}}=0{,}15$ Maschine 2 $\frac{0{,}05\cdot 0{,}2}{\frac{4}{100}}=0{,}25$ Maschine 3 $\frac{0{,}04\cdot 0{,}6}{0{,}4}=0{,}6$

X ... Anzahl der Ausschüsse

$99\%\leq P(X\geq 1)\leq 1-P(X=0)$

$0{,}99\leq 1-(0{,}96)^n$

$0{,}96^n\leq 0{,}01$

$\ln 0{,}96\cdot n\leq \ln 0{,}01$

$n\geq 112{,}3$ mind. 113 Stück entnehmen.

$E(X)=113\cdot 0{,}04$

$=4{,}52\approx 5$ Ausschußstücke

c) $P(A)=0{,}99\cdot 0{,}04+0{,}96\cdot 0{,}03=0{,}07$ (Wahr für Ausschuß erhält)

$P(B)$ beinhaltet ein Ereignis 2, 3, 4 ... Gegenereignis $1-P(\overline{B})$

$P(B)=1-(0{,}93)^5=\ldots\approx 0{,}30$

nicht für Ausschuß erhält

Lösung Aufgabe 5a)

Gegeben sind $P(G) = 0{,}1$, $P(F) = 0{,}05$ und $P(O) = 0{,}2$. Daraus folgt:

$$P(A) = P(G \cap O) = P(G) \cdot P(O) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$$

$$P(B) = P(G \cap F) = P(G) \cdot P(F) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}005$$

$$P(C) = P(G \cap \overline{F} \cap \overline{O}) + P(\overline{G} \cap F \cap \overline{O}) + P(\overline{G} \cap \overline{F} \cap O) =$$

P (C)= 0, 1x0.95x0,8+0.9x0,95x0,2+0.9x0,05x0,8= 0.283 also 28.3 %

$$P(D) = P(G \cap F \cap \overline{O}) + P(G \cap \overline{F} \cap O) + P(\overline{G} \cap F \cap O) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}032$$

$$P(E) = P(\overline{G} \cap \overline{F} \cap \overline{O}) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 0{,}684$$

Lösung Aufgabe 5b)

Wie immer bei statistischen Untersuchungen verwendet man die ermittelten relativen Häufigkeiten als (sogenannte empirische) Wahrscheinlichkeiten.
Daher gilt:

$$P(A) = \frac{471+151}{1000} = 0{,}622 \ ,$$

$$P(B) = \frac{471+148}{1000} = 0{,}619 \quad \text{und}$$

$$P(A \cap B) = \frac{471}{1000} = 0{,}471.$$

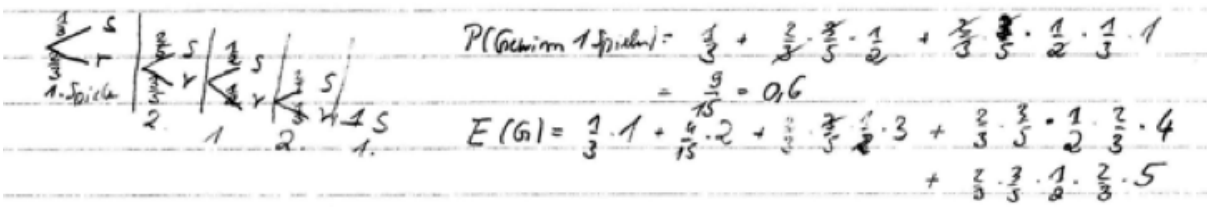
Es folgt $\quad P(A) \cdot P(B) = 0{,}622 \cdot 0{,}619 \approx 0{,}385$

Obwohl man bei statistischen Untersuchungen mit Abweichungen rechnen muß, kann man dennoch sagen, daß $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ist, d.h. A und B muß man als abhängige Ereignisse ansehen.

Die Vererbung ist also mit im Spiel!

Lösung Aufgabe 6

$P(\text{schwarzeKugel}) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(\text{roteKugel}) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $n = 10$

$$P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{81} \qquad P(B) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}2276$$

$P(C) = P(X \geq 4) = 0{,}4407 \quad (GTR - PRGM)$