Basiswissen Teil A - ohne Hilfsmittel

1a) Geben Sie für die Funktion b mit $b(x) = 3(x^2 - 4e^{-2x})$ eine mögliche Stammfunktion an.

b) Gegegen ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{x+1}$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq -1)$.

Eine Stammfunktion F von f wird beschrieben durch:

- ☐ $F(x) = \frac{3 \cdot x}{\frac{1}{2} \cdot x^2 + x}$ $(x \in D_F)$
- ☐ $F(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$ $(x \in D_F)$
- ☐ $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln|x+1|$ $(x \in D_F)$
- ☐ $F(x) = 3 \cdot \ln|x+1|$ $(x \in D_F)$
- ☐ $F(x) = \ln|x+1|$ $(x \in D_F)$

2 Ermitteln Sie den Wert von a so, dass die Parabel $f(x) = ax^2 - 4a$ mit der x – Achse eine Fläche von 3 einschließt.

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2)$ $(x \in R)$.

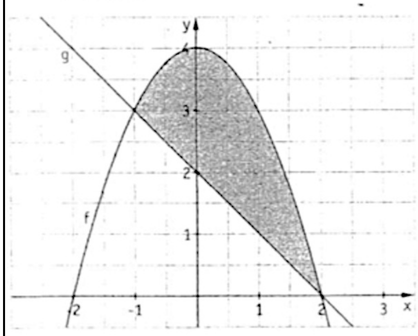
a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ $(x \in R)$ eine Stammfunktion von f ist.

Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2 \cdot e$ gilt.

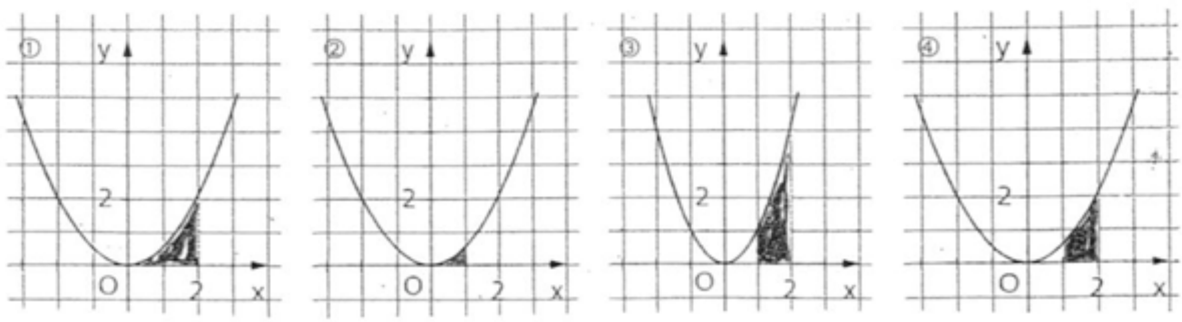
4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der in Abb.1 gefärbten Fläche.

Abb.1:



5 Entscheiden Sie durch Ankreuzen, durch welche der in Abb. 2 dargestellten Flächen das bestimmte Integral $\int_1^2 0{,}5x^2\,dx$ dargestellt wird.

Abb.2:



Komplexaufgabe Teil B - mit Hilfsmittel

Eine Grünbrücke dient wildlebenden Tieren zur gefahrlosen Überquerung einer stark befahrenen Schnellstraße.
Jede Ebene, welche die Grünbrücke senkrecht zur Fahrtrichtung der Schnellstraße schneidet, erzeugt die gleiche Querschnittsfläche der Grünbrücke. Diese Querschnittsfläche der Grünbrücke wird in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt (siehe Abbildung 1). Die x-Achse verläuft in Höhe der Schnellstraße. Die Grünbrücke ist an den Stellen $x=-20{,}0$ und $x=20{,}0$ in Höhe der Schnellstraße am Erdboden verankert. Die Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke kann durch den Graphen der Funktion f mit

$y=f(x)=-\frac{3}{640}\cdot x^2+12{,}5 \quad (x\in R, -40{,}0\le x\le 40{,}0)$ beschrieben werden.

Die Durchfahrtshöhe für Fahrzeuge beträgt an den Stellen $x=-20{,}0$ und $x=20{,}0$ jeweils 8,5 m; an der Stelle $x=0{,}0$ beträgt die Durchfahrtshöhe 10,0 m.

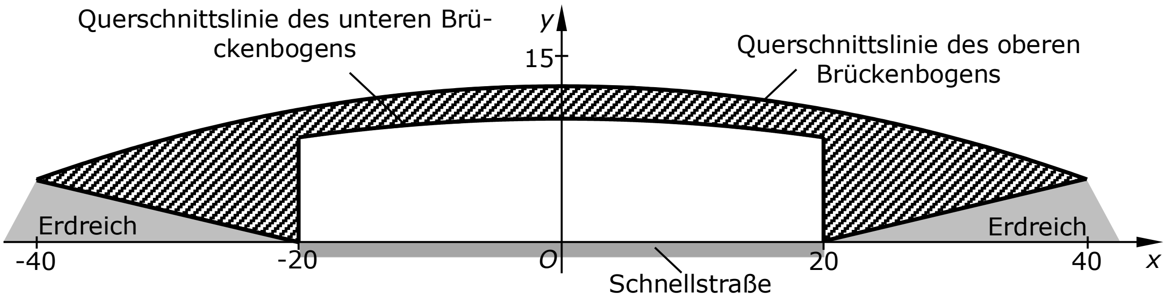


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

a) Weisen Sie nach, dass aufgrund der gegebenen Eigenschaften die Querschnittslinie des unteren Brückenbogens der Grünbrücke im Intervall $-20{,}0\le x\le 20{,}0 \quad (x\in R)$ durch den Graphen der Funktion g mit $y=g(x)=-\frac{3}{800}\cdot x^2+10{,}0$ beschrieben werden kann. Geben Sie den Abstand der Querschnittslinien der beiden Brückenbögen an der Stelle $x=0{,}0$ an.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

b) Ein Tierschützer behauptet, dass die Neigung der Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke gegenüber der Horizontalen an der Stelle $x=-20{,}0$ größer als 20 % ist. Untersuchen Sie, ob diese Behauptung wahr ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 03

c) Das Teilstück der Grünbrücke hat im Bereich $-20{,}0\le x\le 20{,}0$ eine Breite von 75,0 m. Dieses Teilstück besteht aus einer speziellen Stahlkonstruktion, die mit Beton vergossen wird.
77 % des Gesamtvolumens dieses Teilstücks der Grünbrücke besteht aus Beton.
Ermitteln Sie das Volumen an Beton, welches zum Gießen dieses Teilstücks der Grünbrücke notwendig ist.
Bestimmen Sie die Länge des oberen Brückenbogens im Intervall $-20{,}0\le x\le 20{,}0$.

Erreichbare BE-Anzahl: 07

d) Die Querschnittsfläche der Grünbrücke wird im Intervall $20{,}0\le x\le 40{,}0 \quad (x\in R)$ von einer Strecke s mit den Endpunkten $P_1(20{,}0|0{,}0)$ und $P_2(40{,}0|f(40{,}0))$ begrenzt.
Die Strecke s liegt auf dem Graphen einer linearen Funktion h.
Im Intervall $20{,}0\le x\le 40{,}0 \quad (x\in R)$ soll eine rechteckige Informationstafel an der Querschnittsfläche der Grünbrücke angebracht werden. Eine Ecke soll auf der Querschnittslinie des oberen Brückenbogens der Grünbrücke und eine weitere Ecke auf der Strecke s liegen (siehe Abbildung 2).

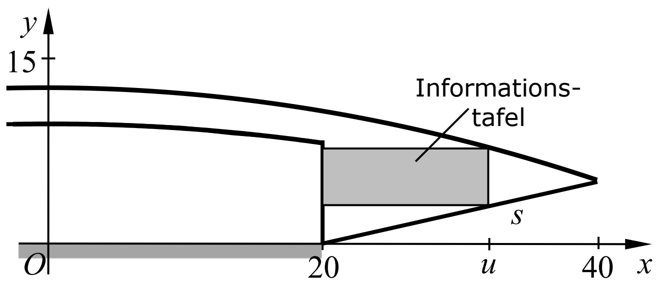


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

Für jeden Wert von u mit $20{,}0<u<40{,}0 \quad (u\in R)$ kann der Flächeninhalt A der Informationstafel mit der Gleichung $A(u)=(u-20)\cdot(f(u)-h(u))$ beschrieben werden.
Ermitteln Sie die Länge einer Seite der rechteckigen Informationstafel mit größtmöglichem Flächeninhalt.

Erreichbare BE-Anzahl: 04

Anwendungsaufgaben - mit Hilfsmitteln

1 Entladekurve eines Kondensators
Für einen Kondensator lässt sich die Entladestromstärke als Funktion der Zeit durch folgende Gleichung angeben: $I(t) = I_0 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} \quad (t > 0)$
Berechnen Sie die Ladung, die der Kondensator in den ersten 5 s des Entladevorgangs abgibt, wenn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gilt : $I_0 = 2{,}4$ mA.

Lösung: $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ C

2 Bogenlänge von Kurven

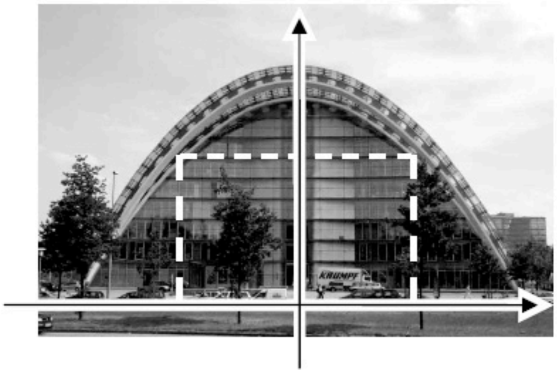
a) Berechnen Sie für die lineare Funktion $f(x) = 3x + 1$ die Bogenlänge über dem Intervall [0;3].
Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie die Streckenlänge elementar berechnen.

b) Berechnen sie die Länge des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-1)^3}$ über dem Intervall [1; 4].

c) Die NEILsche Parabel ist der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x^3}$.
Berechnen sie die Bogenlänge der NEILschen Parabel im Intervall [0; b].

Lösungen:
a) $l \approx 9{,}49$ LE
b) $l \approx 4{,}67$ LE
c) $\ell = \frac{8}{27} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot b\right)^3} - \frac{8}{27}$ LE

3 Das Gebäude in den Abbildungen heißt „Berliner Bogen" und steht in Hamburg.
Ein Architekt in Shanghai möchte gerne das gewölbte Glasdach für einen Neubau kopieren.



Ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) wird in das Gebäude gelegt. Der ebene Boden des Gebäudes liegt in der x-y-Ebene (siehe Abbildungen)
Das gewölbte Glasdach soll ähnliche Maße wie das Original besitzen. Der höchste Punkt des gewölbten Glasdaches hat einen Abstand von 36 m zum ebenen Boden des Gebäudes.
Das gewölbte Glasdach soll am ebenen Boden doppelt so breit wie hoch sein.
Die Länge des Gebäudes am Boden (Tiefe des Gebäudes ohne die überstehenden Teile des gewölbten Glasdaches) soll 140 m betragen.

a) Erläutern Sie, inwiefern die quadratische Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{36} \cdot x^2 + 36 \quad (x \in \mathbb{R})$ die äußere Profillinie des gewölbten Glasdaches modelliert.

b) Unter dem gewölbten Glasdach soll ein quaderförmiges Bürogebäude eingebaut werden, welches sich auf der gesamten Länge des Gebäudes erstreckt (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie dessen Maße so, dass der Rauminhalt dieses Bürogebäudes maximal wird.

c) Zwischen dem gewölbten Glasdach und dem quaderförmigen Bürogebäude soll auf dem Dach des quaderförmigen Bürogebäudes eine Cafeteria eingerichtet werden.
Bestimmen Sie, wie viel Raum (in m³) dafür zwischen gewölbtem Glasdach und quaderförmigen Bürogebäude frei bleibt.

(W) Bedingte Wahrscheinlichkeit – Satz von Bayes

Im Winter 1995/96 herrscht in Deutschland eine Grippeepidemie. Folgende (gerundete) Zahlen geben Auskunft über das Ausmaß der Epidemie:
Von den 80 Millionen in Deutschland lebenden Personen erkranken 10 Millionen Personen.
Von den 9,6 Millionen in Baden-Württemberg lebenden Personen erkranken 0,96 Millionen Personen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   Ereignis A: Eine im Winter 1995/96 in Deutschland lebende Person wird zufällig ausgewählt und ist nicht an Grippe erkrankt.
   Ereignis B: Eine im Winter 1995/96 nicht in Baden-Württemberg wohnende Person ist an Grippe erkrankt.
   Ereignis C: Eine im Winter 1995/96 an Grippe erkrankte Person wohnt in Baden-Württemberg.

b) Eine im Winter 1995/96 in Deutschland lebende Person wird zufällig ausgewählt.
   Untersuchen Sie, ob die folgenden Ereignisse B und E stochastisch unabhängig sind.
   B: Die ausgewählte Person wohnt in Baden-Württemberg.
   E: Die ausgewählte Person ist an Grippe erkrankt.

c)) Vor der Epidemie haben in Baden-Württemberg Grippe-Schutzimpfungen stattgefunden.
   5 % der geimpften Personen erkrankten dennoch an Grippe.
   Die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht geimpfte Person an Grippe erkrankt, ist 21 %.
   Berechnen Sie den Anteil der geimpften Einwohner Baden-Württembergs an allen Einwohnern dieses Bundeslandes.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine in Baden-Württemberg an Grippe erkrankte Person geimpft war.

(nach Abitur Baden-Würtemberg 1998)