Übungsblatt — Thema: Klausurübung — Klausur 3

Schwerpunkt 1: Rechnen mit Vektoren / LGS (Aufgaben ohne HM)

1 Gegeben sind die Punkte *A* - *F* mit folgenden Koordinaten:
$A(4 \mid 3 \mid 1)$, $B\,(5 \mid 6 \mid -1)$, $C\,(-1 \mid 4 \mid 2)$ und $D\,(3 \mid 5 \mid 4)$, $E\,(4 \mid 8 \mid 2)$, $F\,(-2 \mid 6 \mid 5)$.
Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{CF}$ an.
Weisen Sie nach, dass der Betrag dieser Vektoren gleich ist.

$\overrightarrow{AD}$ = ________________________________ $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ = ________________________________

$\overrightarrow{BE}$ = ________________________________ $\left|\overrightarrow{BE}\right|$ = ________________________________

$\overrightarrow{CF}$ = ________________________________ $\left|\overrightarrow{CF}\right|$ = ________________________________

2 M_a, M_b und M_c seien die Seitenmittelpunkte der Seiten eines Dreiecks *ABC*.
Geben Sie die Verschiebungen $\overrightarrow{AM_a};\ \overrightarrow{BM_b};\overrightarrow{CM_c}$ jeweils als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ an.

$\overrightarrow{AM_a}$ = ________________ $\overrightarrow{BM_b}$ = ________________ $\overrightarrow{CM_c}$ = ________________

3 Lösen Sie jeweils eine der folgenden Linearkombinationen von Vektoren rechnerisch und eine zeichnerisch.

a) $\vec{x} = \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ b) $\vec{y} = -\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

4a) Lösen Sie die folgenden LGS.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & = & 5 \\ & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & -2 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 0{,}5 \end{array}$$

b) Decide, how many solutions an LGS has, when the GTR shows:

A
```
rref([A]
    [[1 0 0 8 ]
     [0 1 0 -1]
     [0 0 0 0 ]]
```

B
```
rref([B]
    [[1 0 1 0]
     [0 1 0 0]
     [0 0 0 1]]
```

C
```
rref([C]
    [[1 0 0 3 ]
     [0 1 0 -2]
     [0 0 1 6 ]]
```

c) Die Summe aus je zwei von drei natürlichen Zahlen übertrifft die Dritte um 12 bzw. 14 bzw. 16.
Bestimmen Sie die drei Zahlen durch schriftliche Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Schwerpunkt 2: Steckbriefaufgaben / Extremwertaufgaben / Funktionenschar (Aufgaben mit HM)

1 Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung.

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades verläuft durch die Punkte $T(1|4)$ und $U(0|2)$. Die Tangente an den Graphen durch den Punkt *T* ist parallel zur *x* – Achse.
Der Punkt *U* ist gleichzeitig Wendepunkt des Graphen.

b) Von einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist bekannt, dass der Graph dieser Funktion symmetrisch zur *y* – Achse ist und durch die Punkte $V(0|2)$ und $W(1|1)$ verläuft.
Der Punkt *W* ist außerdem ein lokaler Tiefpunkt des Graphen.

2 Bestimmen Sie, welcher Punkt des Graphen der Funktion *f* mit $f(x) = -x^2 + 6\cdot x - 3$ vom Punkt $(6|6)$ den kleinsten Abstand hat. Geben Sie diesen Abstand an.

3 Die Gerade $x = u$ schneidet den Graphen der Funktion *g* mit $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ im Punkt *A* und die *x*-Achse in *B.* Die Gerade $x = 2u$ schneidet die *x*-Achse in *C* und den Graphen von *g* in *D*. Bestimmen Sie denjenigen reellen Wert von *u* mit $0 < u < 3$, für den der Inhalt der Fläche von *ABCD* maximal wird.

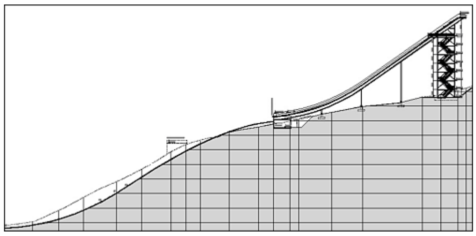
Quellen: nach Lambacher/Schweizer 11/12 Mathematik für Gymnasien Sachsen 2005

4 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\dfrac{120(x-120)^2}{(x-120)^2+7200}+10 \quad (x\in\mathbb{R}, 0\le x\le 130)$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit dem GTR.

b) Der Graph einer weiteren Funktion g mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ enthält die Punkte $P_1(0|95)$, $P_2(10|95)$ und $P_3(20|92)$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten *a, b* und *c.*
Zeichnen Sie den Graphen von g in den gleichen Screen auf dem GTR.

Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang. In einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) beschreibt der Graph von f das Profil des Aufsprunghangs, der Graph von g die Flugbahn eines Skispringers. Der Absprung des Skispringers erfolgt bei $x = 0$.



c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt.
Berechnen Sie maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Aufsprunghang.

Der Wendepunkt $W(71|40)$ von f entspricht dem „kritischen Punkt" des Aufsprunghangs. Mögliche Flugbahnen des Skispringers werden nun durch die Graphen der Funktionen g_k mit $g_k(x) = -0{,}015x^2 + kx + 95$ beschrieben.

d) Ermitteln Sie, welchen Wert der Parameter k höchstens annehmen darf, damit der Springer mit dieser Flugbahn nicht hinter dem kritischen Punkt landet.

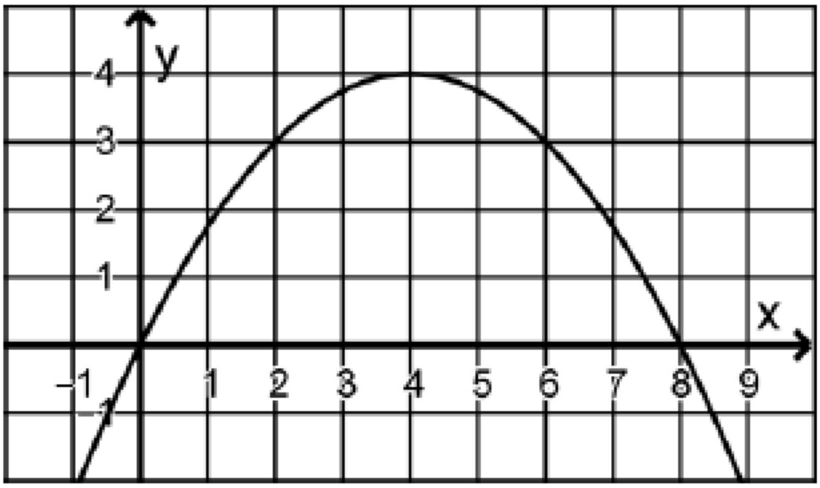
5 Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k(x)=-k\cdot x\cdot(x-8)$ mit $k\in\mathbb{R}^+$.
Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Geben Sie die Nullstellen von f_k an.

b) Begründen Sie, dass der Punkt $(4|16\cdot k)$ der Hochpunkt von G_k ist.

c) Bestimmen Sie den Abstand der Hochpunkte von G_k und G_{k+1}.

Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{4}}$.



Betrachtet werden die Trapeze mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C_u\left(8-u\middle|f_{\frac{1}{4}}(u)\right)$ wobei u alle Werte des Intervalls $]0;4[$ annimmt.

d) Zeichnen Sie das Trapez für u **=** 1 in die Abbildung ein.

e) Geben Sie einen Term an, mit dem die Länge der beiden gleich langen Schenkel des Trapezes ABC_uD_u berechnet werden kann.

f) Der Flächeninhalt des Trapezes ABC_uD_u kann mit dem Term $(8-u)\cdot f_{\frac{1}{4}}$ berechnet werden.

Beschreiben Sie eine geometrische Überlegung, mit der sich dieser Term herleiten lässt.

g) Unter den betrachteten Trapezen hat eines den größten Flächeninhalt.
Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von *u*.

h) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises, auf dem die Punkte *A, B* und $E(4|8)$ liegen.

Quellen: nach Lambacher/Schweizer 11/12 Mathematik für Gymnasien Sachsen 2005