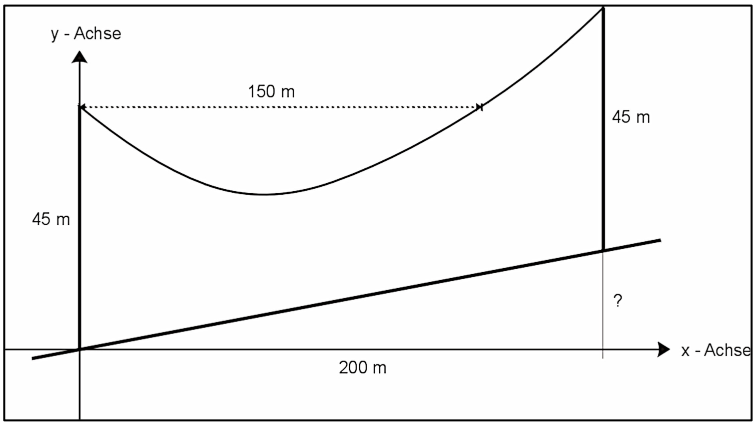
Thema: Anwendungsaufgaben Kurvendiskussion — Arbeitsblatt 5/Analysis

1 Für den Hochwasserschutz an der Spree in Bautzen wird der den Bau eines Wasserkanals geplant. In einer Modellierung liegt die Profillinie des Kanalquerschnitts in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit ≙ 1 m). Die *x* - Achse verlaufe genau auf der Höhe des normalen Wasserstandes (Normalpegel).
Unterhalb des Normalpegels wird die Profillinie des Kanalquerschnitts durch die Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}0125x^4 - 3{,}2$ beschrieben.

1.1 Illustrate the facts in a sketch.

1.2 Oberhalb des Normalpegels wird die Begrenzung des Kanals tangential fortgeführt.
Diese geradlinigen Fortführungen sind für einen 1,80 Meter über Normalpegel liegenden Wasserstand ausgelegt.
Berechnen Sie die Breite des Kanals in Höhe bei diesem Pegelstand.

2 Ein kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit ≙ 1 m) wird in ein Gelände mit einem Hang gelegt (siehe Abbildung). Der Hang besitzt eine Steigung von 15 %.
Auf dem Hang sind zwei 45 m hohe Strommasten aufgestellt.
Zwischen den Strommasten ist in Kabel gespannt, welches nach 150 m Entfernung vom linken Mast wieder die Höhe der linken Aufhängung erreicht.
Aus einer Karte liest man einen horizontalen Abstand der Fußpunkte der Strommasten von 200 m ab.



2.1 Der Kabelverlauf soll näherungsweise durch den Graphen einer quadratische Funktion beschrieben werden. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.
(Lösung: $f(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}45x + 45$)

2.2 Berechnen Sie die Stelle, an der das Kabel am stärksten durchhängt.
Geben Sie an, wie tief das Kabel dort gegenüber dem Aufhängepunkt am linken Mast hängt.
Bestimmen Sie den Winkel, den das Kabel am linken Mast mit der Verbindungslinie der beiden Mastspitzen bildet.

2.3 Bestimmen Sie die Stelle, an der die senkrechte Entfernung zwischen Hang und Leitung minimal ist.
Bestimmen Sie die Höhe, bis zu der die Bäume dort wachsen dürften, wenn die senkrechte Entfernung zwischen Leitung und Baumkrone mindestens 7 m betragen muss.

3 Eine Firma stellt Endstücke für Gardinenstangen her, welche die Form eines Rotationskörpers haben. Ein solches Endstück wird in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung *O* (1 Längeneinheit entspricht 1 Zentimeter) durch die Rotation der Graphen der Funktionen *f* und *g* um die *x*-Achse beschrieben werden.
Dabei rotiert im Intervall $0{,}0 \le x \le 11{,}0$ der Graph der Funktion *f* mit

$f(x) = 0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}180 \cdot x^2 + 1{,}200 \cdot x \quad (x \in \mathbb{R})$ und im Intervall $11{,}0 \le x \le 15{,}0$ der Graph der Funktion *g* mit $g(x) = 0{,}144 \cdot x + 0{,}484 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Dieses Endstück besitzt zunächst keinen Hohlraum. Das Endstück wird durch eine Ebene geschnitten, welche die *x*- und *y*-Achse enthält. Dabei entsteht die in Abbildung 1 dargestellte Schnittfläche.

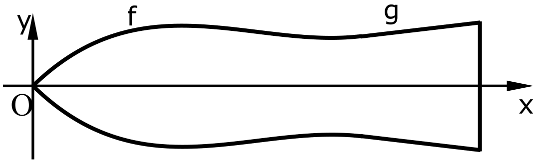


Abbildung 1 (nicht maßstäblich)

3.1 Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion *f* im Punkt $P(11{,}0 | f(11{,}0))$ tangential (ohne Knick) in den Graphen der Funktion *g* übergeht.

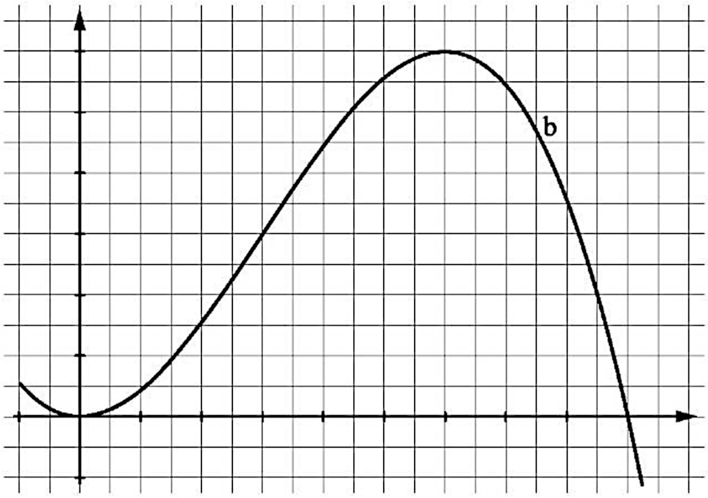
3.2 An jeder Stelle *x* $(x \in \mathbb{R}; 0{,}0 \le x \le 15{,}0)$ besitzt das Endstück einen Durchmesser.
Ermitteln Sie den größten Durchmesser des Endstücks.

4 Viele Schülerinnen und Schüler gehen gerne feiern, natürlich auch in den angesagten Discotheken in Stadt und Land. Manchmal beschäftigen sie sich jedoch auch mit ernsthafteren Dingen: z. B. mit der Organisation einer Vorabiparty, um Geld für eine üppigere Ausgabe der eigenen Abiturfeier einzunehmen.
Eine Jahrgangsstufe 11 will von den Erfahrungen ihrer Vorgänger profitieren. Diese haben im Jahr zuvor die einkehrenden und abgehenden Besucher ihrer Party ab dem Einlass um 20 Uhr gezählt.

Einer der damaligen, matheschlauen Organisatoren kann sich noch daran erinnern, dass sich die Anzahl der jeweils anwesenden Besucher gut durch den Funktionsterm

$b(t) = -\frac{50}{9} \cdot t^3 + 50 \cdot t^2$ modellieren lässt.

4.1 Label the axes of the coordinate system and describe, what the term *b(t)* indicates.



4.2 Zu welchem Zeitpunkt war die Party beendet?
Nehmen Sie begründet Stellung zur Aussagekraft des Graphen der Modellierungsfunktion *b* im weiteren Verlauf.
Geben Sie dazu auch einen sinnvollen Definitions- und Wertebereich für *t* und *b(t)* an.

4.3 Berechnen Sie, wie viele Besucher durchschnittlich in den ersten drei Stunden auf der Party angekommen sind.

4.4 Berechnen Sie den Besucherzustrom um Mitternacht.

4.5 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem sich die meisten Besucher auf der Party befanden.
Die angemietete Diskothek hat eine Kapazität von maximal 800 Besuchern.
Mussten partywütige Schülerinnen und Schüler wieder nach Hause geschickt werden?

4.6 Für viele Jugendliche ist es nervig, in einer langen Warteschlange zu stehen. Zudem frieren viele Mädchen (wie immer ☺) in der Schlange, weil sie gern direkt im luftigen Partyoutfit erscheinen. Security und Garderobenpersonal haben angegeben, drei Personen pro Minute abfertigen zu können.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem der Besucherzustrom am Eingang der Diskothek am größten war und überprüfen Sie, ob das Personal während des Abends an seine Grenzen gelangte.
Kann man mit der Modellierungsfunktion auch bestimmen, wann die meisten Personen die Party verlassen haben? Begründen Sie.

4.7 Die Betreiber der Diskothek nehmen für die Saalmiete 2000 € pro Abend und erhalten zudem den kompletten Überschuss beim Verzehr.
Mit welchem Eintrittspreis müssen die Organisatoren kalkulieren, um keinen Verlust zu machen?
Welchen Preis sollten sie ansetzen, um einen Gewinn von 1000 € zu erzielen?

Zum Nachdenken:
Für eine ordentliche Feier- und Tanzatmosphäre benötigt eine Party eine „kritische Masse", in dieser Diskothek sind dies mindestens 200 Personen.
In welchem Zeitraum war diese erreicht? Lässt sich dieser Zeitraum exakt bestimmen?