

Übungsblatt

Thema: Klausurübung

Klausur 1

Teil A - Aufgaben ohne HM – Aufgabengruppe I

- 1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Für $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(x+3) \cdot (x-1)}{3 \cdot x^2} = g$ ($x \in \mathbb{R}; x \neq 0$) gilt:

☐

$g = 3$

☐

$g = \frac{1}{3}$

☐

$g = 1$

☐

$g = \frac{2}{3}$

☐

$g = 0$

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{2-3 \cdot x^2}{x^2-4}$ ($x \in D_f$) besitzt:

☐

eine
waagerechte
Asymptote
 $y = 2$

☐

zwei
waagerechte
Asymptoten
 $y = 2$ und
 $y = -2$

☐

eine
senkrechte
Asymptote
 $x = -3$

☐

eine waagerechte
Asymptote bei
 $y = -3$ und zwei
senkrechte
Asymptoten bei
 $x = 2$ und $x = -2$

☐

keine
Asymptoten

1.3 Der Grenzwert der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2-16}{3 \cdot x-12}$ an der Stelle $x = 4$ lautet:

☐

-4

☐

0

☐

$\frac{8}{3}$

☐

4

☐

$\frac{16}{3}$

1.4 Die zweite Ableitungsfunktion f'' einer Funktion f lautet: $f''(x) = c + dx^3$.
Der Term einer möglichen ersten Ableitungsfunktion lautet:

☐

$cx + 0,25dx^4 + 15$

☐

$cx + 0,25dx^4 + x$

☐

$0,5c^2 + 0,5d^2x^3$

☐

$cx + 0,25dx^3$

☐

$3dx^2$

1.5 Der Anstieg der Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x^3}$ an der Stelle b^2 beträgt:

☐

$\frac{1}{3}$

☐

$\frac{2}{3b}$

☐

$\frac{2b}{3}$

☐

$\frac{3b}{2}$

☐

b^2

- 2a) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit an der Stelle x_0 .
Ermitteln Sie gegebenenfalls die Art der Unstetigkeit.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x} \quad x_0 = 0$$

- b) Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Funktion.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = \frac{3t^2 + 3t}{t+1} \quad t_0 = -1$$

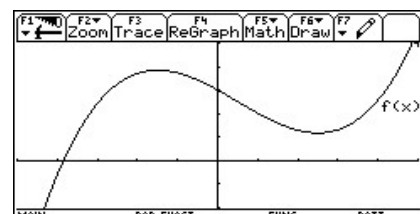
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = \frac{4r \cdot (1+r)}{r^3 + 1}$$

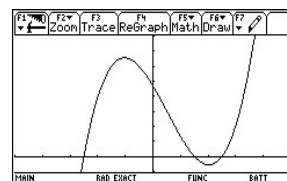
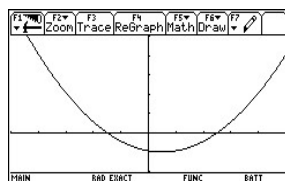
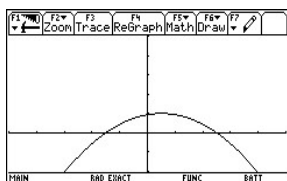
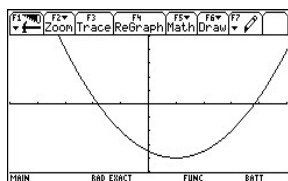
- 3 Bilden Sie die 1. Ableitungsfunktion der Funktion f mit Hilfe des Differenzenquotienten und seines Grenzwertes. Prüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe einer geeigneten Ableitungsregel.

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

- 4 In der Abbildung ist der Graph einer Funktion f dargestellt.
Eine der folgenden 4 Abbildungen stellt den Graphen einer ersten Ableitungsfunktion von f dar.

- a) Markieren Sie diese Abbildung und begründen Sie ihre Entscheidung.
Erreichbare BE-Anzahl: ____/02

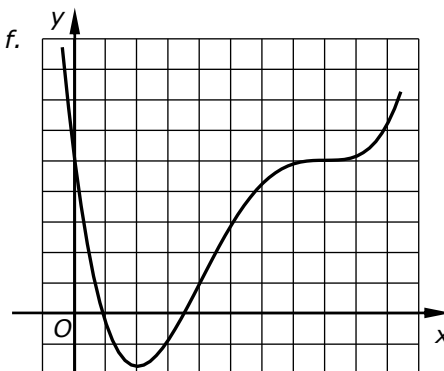




Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f .

- b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f .

Erreichbare BE-Anzahl: ____/03



- 5 Ermitteln Sie $g'(t)$ auf zwei verschiedene Weisen. (Der ausführliche Rechenweg ist verlangt.)

$$g(t) = (4 - t)^2$$

- 6 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 9$

- a) Für welches x_0 gilt $f'(x_0) = 0$?

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse.

Geben Sie die Nullstellen von f an.

- c) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f in den Schnittpunkten mit der x -Achse.

- 7 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3 - 2 \cdot \sin x$.

- a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 | f(0))$.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/03

- b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/02

- 8 Betrachtet wird eine Funktion f , deren Graph symmetrisch bezüglich der y -Achse ist.

Die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1 | f(1))$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3} \cdot x + 4$.

- a) Geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an den Graphen von f im Punkt $(-1 | f(-1))$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/02

- b) Die Tangenten t_1 und t_2 schließen mit der x -Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/03

Teil A - Aufgaben ohne HM – Aufgabengruppe II (mit Auswahl)

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2 \cdot x^2}{x^2 + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/02

b) Der Graph von f und die Parabel $y = k \cdot x^2$ ($x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}, k > 0$) besitzen für jeden Wert von k mindestens einen gemeinsamen Punkt.

Weisen Sie nach, dass es keinen Wert von k gibt, für den genau zwei gemeinsame Punkte existieren.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/03

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

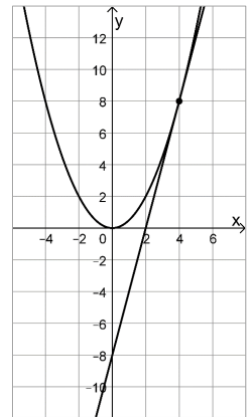
Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $(4|f(4))$.

a) Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/01

b) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(u|f(u))$ die y -Achse im Punkt $(0|-f(u))$ schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: ____/04



Teil B: Aufgaben mit HM (MMS & Formelsammlung)

- 1** Ermitteln Sie für jede der gegebenen Funktionen f , g und h einen Term der ersten Ableitungsfunktion. (Eine Termvereinfachung ist nicht verlangt.)

a) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$

b) $g: x \mapsto 3(x^2 + 5x + 1)(-x^3 + 7x - 1)$

c) $h: x \mapsto \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$

- 2** Berechnen Sie, in welchen Punkten der Graph der Funktion f die Steigung m besitzt.

(1) $f(x) = x^4 \quad m = 4$ (2) $f(x) = x^6 \quad m = 18750$ (3) $f(x) = x^0 \quad m = 1$

- 3** Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 - 2x$ bzw. $g(x) = -x^2 + 0,5x$.

- a) Calculate the abscissas, where the graphs of the functions intersect.
 b) Beschreiben Sie, was man unter „orthogonal schneiden“ von Funktionsgraphen versteht.
 c) Weisen Sie nach, dass sich die Graphen in einem Schnittpunkt orthogonal schneiden.

- 4** Eine Rutsche hat ein Profil, das dem Verlauf des Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0,002 \cdot (x - 20)^3$ ($x \in \mathbb{R}$) im Intervall $0 \leq x \leq 16$ entspricht.

- a) Bestimmen Sie die Steigung am Ende der Rutsche.
 b) In einem Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ des Graphen von f hat die Rutsche eine Neigung von 45° . Ermitteln Sie x_0 .

(Bildquelle: <http://www.nibis.de/>)



Übungsblatt Thema: Klausurübung - Lösungen Klausur 1

Teil A - Aufgaben ohne HM – Aufgabengruppe I

zu 1 Feld 2; Feld 4; Feld 3; Feld 1; Feld 4

zu 2a) $f(x_0)$ existiert nicht; nicht stetig; Lücke

b) $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = -3, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$

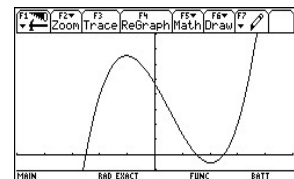
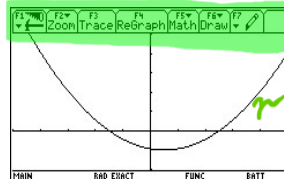
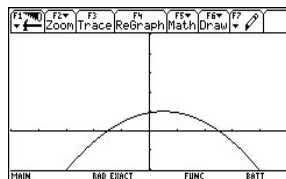
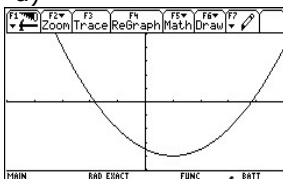
zu 3
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - x - h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \frac{-h}{(x+h) \cdot x} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h) \cdot x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h) \cdot x} = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

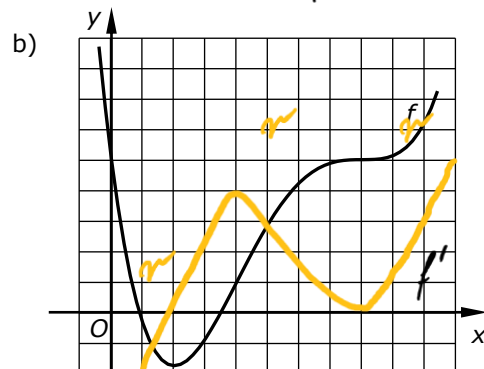
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

zu 4

a)



Bg.: Zwischen Maximum von f bei $x \approx -1,5$ und Minimum von f bei $x \approx 2,5$ sind alle Anstiege von f negativ ✓



zu 5 $g'(t) = 2t - 8$ z.B.: Kettenregel; binomische Formel + Summenregel

zu 6a) $x_0 = 0$

b) $P_1(3|0), P_2(-3|0) \quad x_{01} = 3, x_{02} = -3$

c) $t_1 : y = 6x - 18 \quad t_2 : y = -6x - 18$

zu 7

a) $f'(x) = -2 \cdot \cos x, f'(0) = -2, f(0) = 3$

Damit: $y = -2 \cdot x + 3$

b) $[1; 5]$

zu 8

a) $y = -\frac{4}{3} \cdot x + 4$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f liegen t_1 und t_2 symmetrisch bezüglich der y -Achse.

b) t_1 schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(-3|0)$ und $(0|4)$. Damit ergibt sich für den Umfang des Dreiecks $2 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 16$.

Teil A - Aufgaben ohne HM – Aufgabengruppe II (mit Auswahl)

zu 1a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot x^2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \cdot 2}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = 2$

Erreichbare BE-Anzahl: 2/02

zu 1b) $\frac{2 \cdot x^2}{x^2 + 2} = k \cdot x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 \cdot (k \cdot x^2 + 2 \cdot k - 2) \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{2}{k} - 2}$

Für $k \geq 1$ existiert genau ein gemeinsamer Punkt.Für $0 < k < 1$ existieren genau drei gemeinsame Punkte.

Ein anderer Fall ist nicht möglich.

Erreichbare BE-Anzahl: 3/03

zu 2a) $y = 4x - 8$

Erreichbare BE-Anzahl: 1/01

zu 2b) Gleichung der Tangente: $y = mx + n$

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2; m = f'(u) = u$$

$$\frac{1}{2}u^2 = u \cdot u + n \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}u^2, \text{ d. h. } n = -f(u)$$

Erreichbare BE-Anzahl: 13/04

Teil B: Aufgaben mit HM (MMS & Formelsammlung)

Lösung zu **1** (Lösung mit MMS reicht, **nur** zur Verdeutlichung der Schritte hier der Lösungsweg ohne Nutzung MMS!)

a) ⌚ 1 Minute, 🧠

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 - 5$$

b) ⌚ 3 Minuten, 🧠

$$g(x) = 3 \cdot \underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)} \underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= 3 \cdot \left[\underbrace{(2x + 5)}_{u'(x)} \underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)} \underbrace{(-3x^2 + 7)}_{v'(x)} \right] \end{aligned} \quad \text{Produktregel}$$

c) ⌚ 3 Minuten, 🧠

$$h(x) = \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 15x^2 - (5x^3 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

zu **2**

(1) $P(1|1)$

(2) $P(5|15625)$

(3) in jedem Punkt des Graphen

Ausführliche Schülerlösung zu **3** (Lösung mit MMS reicht, **nur** zur Verdeutlichung der Schritte hier der Lösungsweg ohne Nutzung MMS!)

3. $f(x) = x^2 - 2x$ $g(x) = -x^2 + 0,5x$

a) $x^2 - 2x = -x^2 + 0,5x$ $+x^2$

$2x^2 - 2x = 0,5x$ $1 \cdot 0,5x$

$2x^2 - 1,5x = 0$ $1:2$

$x^2 - 0,75x = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 1,25$

b) ~~Ben~~ Funktionen schneiden sich orthogonal, wenn ihre Tangenten in dem Schnittpunkt einen Winkel von 90° zueinander haben.

c) $P(0|0)$

$t_{f(x)}(x) = -2x$ $t_{g(x)}(x) = 0,5x$

$\left(\text{denn } \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{-2 - 0,5}{1 + (-2) \cdot 0,5} \right| = \left| \frac{-2,5}{0} \right| \right)$

$m_n = -\frac{1}{m_e}$

$-2 = -\frac{1}{0,5}$ w.A. damit $\alpha_s = 90^\circ$

zu **4**

a) $m = -0,096$

b) $x_0 = 7,09$